الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى
اللجنة الشعبية العامة للتعليم العالي
الجامعة المفتوحة
المعرفة حق طبيعي لكل إنسان

تمارين محلولة في مادة:

مبادئ الإحصاء

2009 مسيحي

ف... المرابط

فهرس المحتويـــات

مقـــدمـــة.....3
تبويب البيانات.....4
مقاييس النزعة المركزية.....13
إيجـــاد الوســـــيط.....21
حساب الربيع الأعلى والربيع الأدنى.....26
المنـــوال.....33
خواص المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال.....40
مقاييس التشتت.....47
الانحراف المعياري والتباين.....55
العـــــــزوم (Moments).....64
الأرقام القياسية.....79

مقدمة

في إطار سعي الجامعة المفتوحة إلى تحسين نوعية التعليم بها، وترسيخاً لمفهوم التعلم الذاتي، تم تكليف بعض أعضاء هيئة التدريس بإعداد ملخصات للمواد التعليمية، وأسئلة وتمارين محلولة بهدف مساعدة الطالب على الدراسة الذاتية، والسير في المقرر الدراسي وفقاً لقدراته وظروفه وإمكانياته، وممارسة التقييم الذاتي لمستوى تحصيله العلمي وبصورة مستمرة.

لذا ننصح الدارس بقراءة موضوع أو أكثر من المقرر بفاعلية، ثم يبدأ في الإجابة عن الأسئلة أو التمارين ذات العلاقة بالموضوعات التي درسها ثم يقارن إجابته بالإجابة النموذجية، فإذا وجد إجابته صحيحة ينتقل لدراسة موضوع أو موضوعات أخرى وهكذا.

وعند الانتهاء من دراسة المقرر يبدأ في التدرب على الإجابة عن أسئلة امتحانات سابقة ويقارن إجابته بالإجابات والحلول لهذه الامتحانات، إلى جانب ذلك ينبغي على الدارس أن يستفيد في دراسة المقررات من الوسائط والأساليب والخدمات الأخرى التي توفرها الجامعة من ذلك: حضور اللقاءات العلمية المكثفة، الاستفسار من أساتذة المواد عن نقاط أو جوانب وجد فيها صعوبة.

والله الموفــق

الجامعة المفتوحة

تبويب البيانات

تبويب البيانات:-

يعني وضع البيانات في جدول توزيع تكراري، ثم رسمها بيانياً إذا طلب منك ذلك.

مثال (1):-

كون جدول تكراري للبيانات الآتية، ثم مثلها بيانياً باستخدام المدرج التكراري، والمضلع التكراري، والمنحنى التكراري.

62	33	71	64	51	71	19	48	80	48
46	42	20	52	47	26	52	85	48	70
37	52	44	29	51	28	42	63	49	32
39	47	81	30	47	87	67	82	61	58
75	59	46	56	34	46	15	92	53	36
37	67	53	75	67	53	66	70	22	48

الحل:-

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

= 92 - 15 = 77

تعتبر طول الفترة = 10

$$\text{عدد الفترات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{77}{10} = 7.7 = 8$$

تزيد عدد الفترات فترة واحدة ليكون عدد الفترات الفعلية وهي: 8 + 1 = 9 فترات.

وإذا طلب منا طول الفترة وكان في المعطيات عدد الفترات فإن:-

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفترات}} = \frac{77}{9} = 8\frac{5}{9} = 9$$

ملاحظة: عند كتابة الفترات في الجدول التكراري يجب أن نبدأ بقيمة أقل من أصغر قيمة في البيانات، فإذا كانت أصغر قيمة في البيانات هي 13 مثلاً، فإن بداية الفترات نحسبها بالعدد 10، وإذا كانت أصغر قيمة في البيانات هي 27 مثلاً فإن بداية الفترات تحسب من عند 25، وهكذا....

الفترات	علامات الحصر	التكرارات
20 – 10	||	2
30 – 20	𝍸	5
40 – 30	𝍸 |||	8
50 – 40	𝍸 𝍸 ||||	14
60 – 50	𝍸 𝍸 |	11
70 – 60	𝍸 |||	8
80 – 70	𝍸 |	6
90 – 80	𝍸	5
100 – 90	|	1
المجـــــــموع		60

ملاحظة:-

أقل قيمة هي 15 يفضل أن نبدأ أول فترة في الجدول من عند 10

نرسم المدرج التكراري باتباع الآتي:-

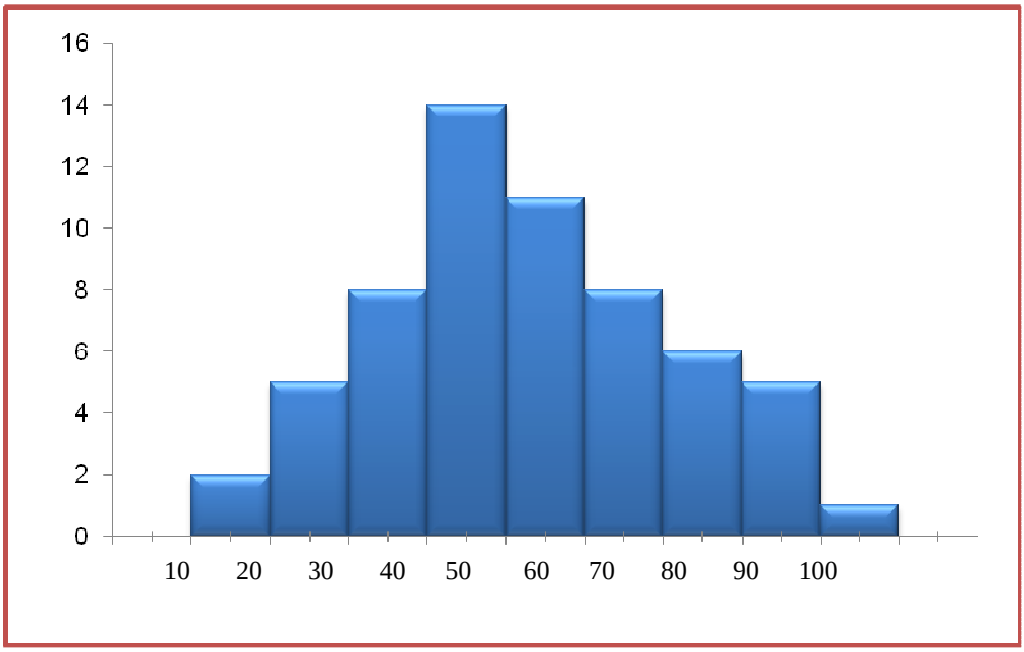
أ- نرسم خط أفقي في ورقة الرسم البياني وهي تمثل الفترات.

ب- ونرسم خط رأسي في ورقة الرسم البياني وهي تمثل التكرارات.

ج- ترفع قواعد الفترات إلى الأطوال المناظرة لها بحيث تكون الأعمدة متلاصقة.

ملاحظة:- المدرج التكراري فقط هو الذي نرسمه من البيانات (الفترات والتكرارات).

ولكن عند رسم المنحنى التكراري أو المضلع التكراري يجب الحصول على مركز الفترات أولاً، ثم نرسم العلاقة بين التكرارات ومراكز الفترات.

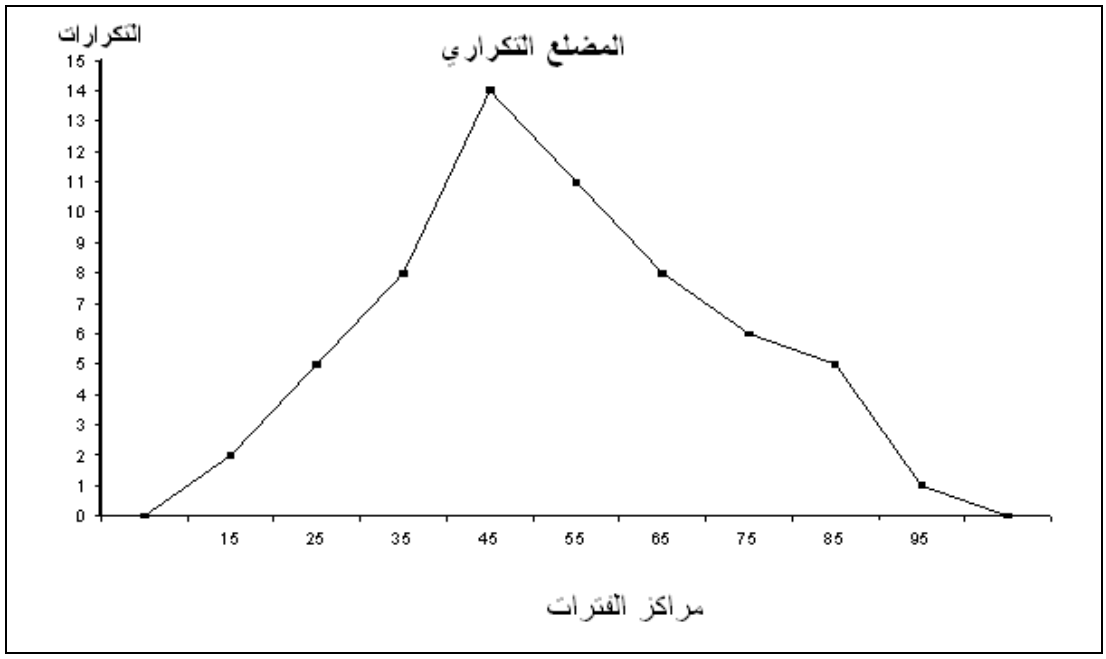


الفترات	التكرارات	مراكز الفترات أو مراكز الفئات
20 – 10	2	15 = 5 + 10
30 – 20	5	25 = 5 + 20
40 – 30	8	35 = 5 + 30
50 – 40	14	45 = 5 + 40
60 – 50	11	55 = 5 + 50
70 – 60	8	65 = 5 + 60
80 – 70	6	75 = 5 + 70
90 – 80	5	85 = 5 + 80
100 – 90	1	95 = 5 + 90
المجـــــــموع	60	

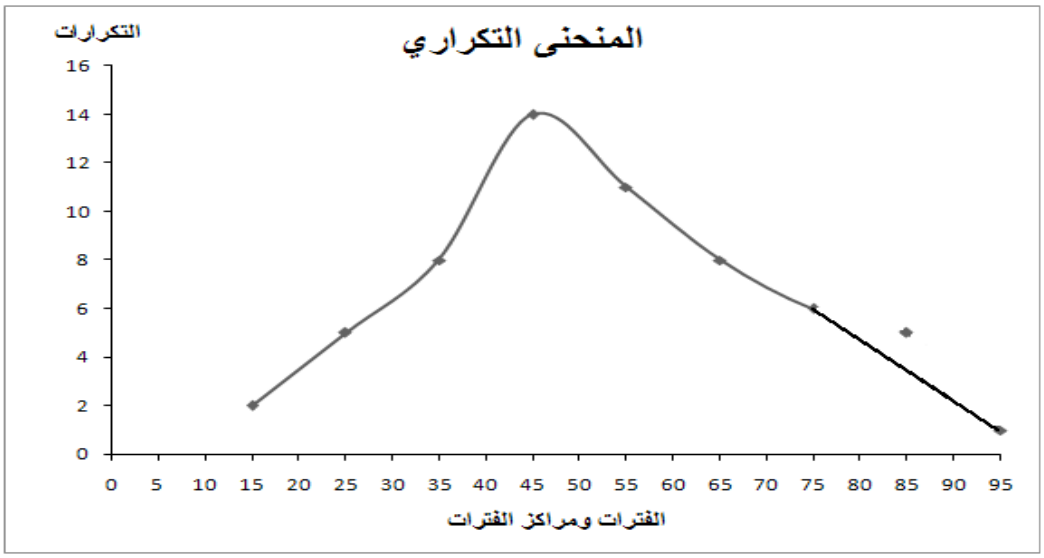
$$\text{مركز الفترة} = \frac{\text{بداية الفترة + نهاية الفترة}}{2} = \frac{20+10}{2} = 15$$

أو مركز الفترة = بداية الفترة + $\frac{1}{2}$ طول الفترة

$$15 = 5 + 10 = 10 \times \frac{1}{2} + 10 =$$



ملاحظة:- في المضلع التكراري نوصل جميع النقاط بمستقيمات ونغلق الشكل عند طرفيه.



ملاحظة:- عند رسم المنحنى التكراري نوصل بين أكبر عدد ممكن من النقاط بحيث لا يؤثر على شكل المنحنى وبحيث لا ينتج لنا خط منكسر، كما لا يمكن قفل المنحنى التكراري من طرفيه.

مثال (2):-

البيانات التالية تمثل أرقام درجات الحرارة في مجموعة من البلدان، كون جدول التوزيع التكراري، ثم ارسم المنحنى التكراري لنفس البيانات.

24	28	22	16	15	42	27	30
34	30	40	25	10	35	37	35
25	22	25	15	12	45	38	
25	24	40	24	28	26	18	

عدد القيم = 30

أكبر قيمة = 45 أصغر قيمة = 10

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

المدى = 45 – 10 = 35 بفرض أن طول الفترة = 5

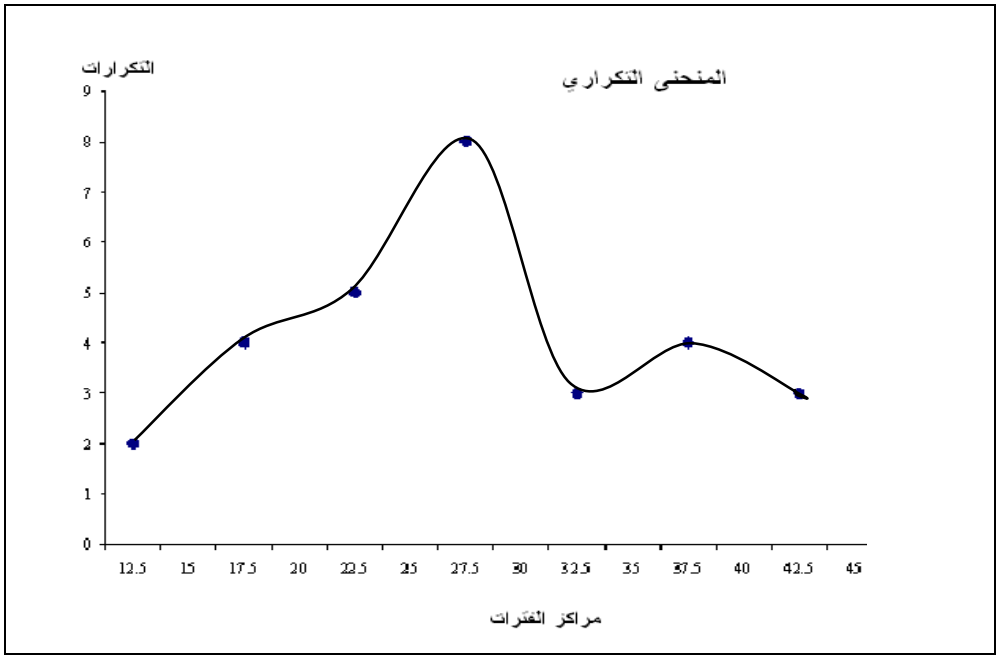
$$\text{عدد الفترات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{35}{5} = 7 \text{ فترات}$$

ولرسم المنحنى التكراري يجب الحصول على مراكز الفترات أولاً، ثم نرسم العلاقة بين مراكز الفترات والتكرارات المقابلة لها.

أو مركز الفترة = بداية الفترة + $\frac{1}{2}$ طول الفترة.

والجدول التكراري المطلوب هو:-

الفترات	علامات الحصر	التكرارات	مراكز الفترات
15 – 10	||	2	12.5
– 15	||||	4	17.5
– 20	𝍸	5	22.5
– 25	𝍸 |||	8	27.5
– 30	|||	3	32.5
– 35	||||	4	37.5
45 – 40	||||	4	42.5
المجـــــــموع		30	



مثال (3):-

من البيانات التالية كوّن جدول التوزيع التكراري، ثم ارسم المدرج التكراري لهذا التوزيع.

97	74	67	79	70	80	76	75
74	75	87	85	71	83	73	74
78	67	96	91	74	78	56	77
85	75	74	63	69	70	79	68
77	76	81	59	70	74	65	75

الحل:-

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

= 97 - 56 = 41

باعتبار طول الفترة = 10

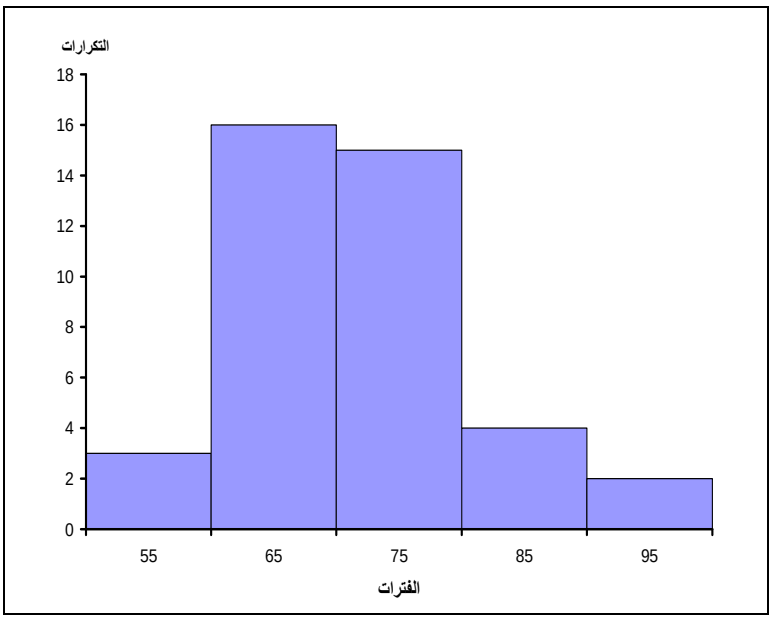
$$\text{عدد الفترات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{41}{10} = 4.1 = 5$$

وإذا طلب منا طول الفترة وكان في المعطيات عدد الفترات فإن:-

$$\text{طول الفترات} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفترة}}$$

الفترات	علامات الحصر	التكرارات
55 -	|||	3
65 -	||||-||||-|||| |	16
75 -	||||-||||-||||	15
85 -	||||	4
95 -	||	2
المجـــــــموع		40

المدرج التكراري



مثال (4):-

من البيانات التالية توضح درجات مجموعة من الطلاب في مادة الإحصاء.

26	39	36	31	33	35	45	36	32	30
34	36	30	38	31	39	33	35	31	37
38	39	41	36	34	42	42	29	35	35
42	34	35	38	41	30	28	34	38	33

المطلوب: أ - كون جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات.

ب- ارسم المنحني التكراري لهذا التوزيع.

الجواب:-

عدد القيم = 40 ، أكبر قيمة هي 45 ، وأصغر قيمة هي 26

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

= 45 – 26 = 19

بفرض أن طول الفترة = 5

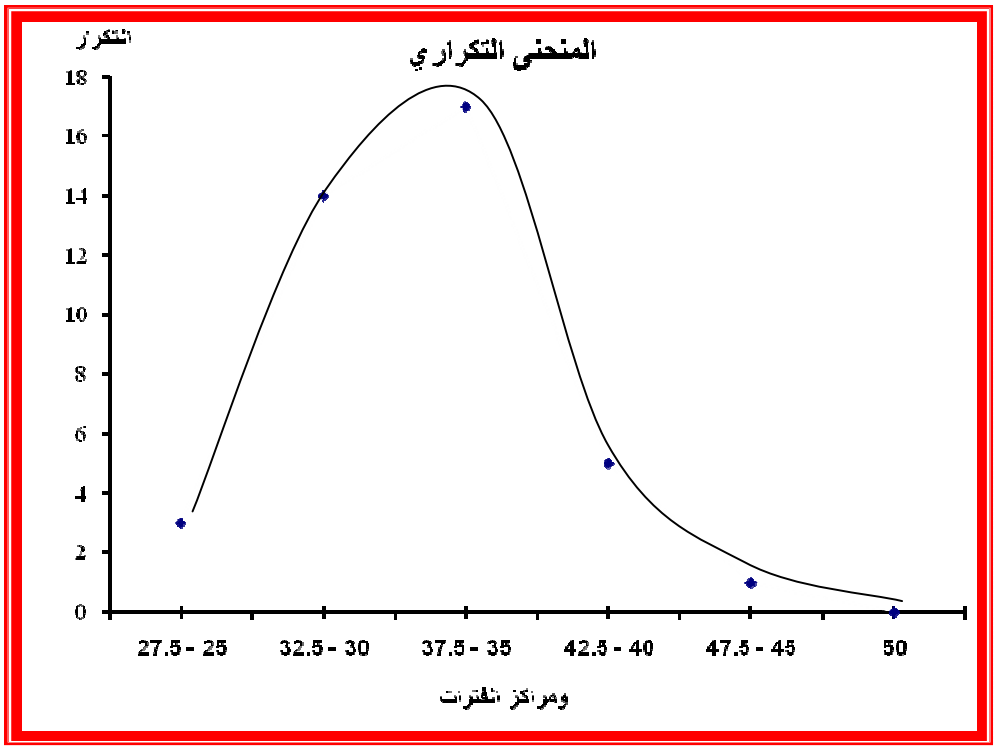
$$\text{عدد الفترات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{19}{5} = 4 \text{ (بعد التقريب)}$$

عدد الفترات + 1 = 4 + 1 = 5 فترات

الفترات	علامات الحصر	التكرارات	مراكز الفترات
25 –	|||	3	27.5
30 –	|||| |||||	14	32.5
35 –	||||| ||||| |||||	17	37.5
40 –	|||||	5	42.5
45 –			1	47.5
المجـــــــموع		40	

ب- لرسم المنحنى التكراري يجب الحصول على مراكز الفترات، ومن القانون

مركز الفترة = بداية الفترة + $\frac{1}{2}$ طولـــــها.



مقاييس النزعة المركزية

1- الوسط الحسابي أو المتوسط الحسابي.
2- الوسيط ويتبعه (الربيع الأعلى، والربيع الأدنى، والمئينات والعشيرات)،
3- المنوال.

فيما يلي ندرس كيفية حساب الوسط الحسابي والوسيط والربيع الأعلى والربيع الأدنى والمنوال لأنواع البيانات التالية:-

1- مفردات مثل (2، 3، 7، 5، 11).
2- مفردات لها تكرار مثل:-

	س1	س2	س3	س4
القيم	3	6	5	9
التكرار (كِ)	4	2	3	1

3- جدول تكراري ذي فترات مثل:-

الفترات	20 -	25 -	30 -	35 -	40 - 45
التكرار	5	3	10	8	4

أولاً:- الوسط الحسابي

1- الوسط الحسابي للقيم المفردة

الوسط الحسابي في هذه الحالة = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهـــا}}$

فمثلاً:- الوسط الحسابي للقيم (2، 3، 7، 5، 11)

يرمز للمتوسط بالرمز $\overline{س}$ = $\frac{2 + 3 + 7 + 5 + 11}{5}$ = $\frac{28}{5}$ = 5.6

2- الوسط الحسابي للمفردات ذات التكرار يحسب بالقانون $\frac{\text{مجـــ (س × ك)}}{\text{مجـــ ك}}$

حيث س هي كل قيمة (مفردة)، ك تكرار كل قيمة.

مثال:-

أوجد الوسط الحسابي للجدول التالي:-

القـــيم	3	6	5	9
التـــكرار	4	2	3	1

الحـــــل:-

في هذه الحالة المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجـــموع (كل قيمة × تكرارها)}}{\text{مجـــموع التكرارات}}$

أي أن $\bar{س}$ = $\frac{\text{مجـــ (س × ك)}}{\text{مجـــ ك}}$

$$= \frac{(1\times9) + (3\times5) + (2\times6) + (4\times3)}{1 + 3 + 2 + 4} = \frac{9 + 15 + 12 + 12}{10} = \frac{48}{10} = 4.8$$

3- إيجاد الوسط الحسابي للجداول التكرارية ذات الفترات.

الوسط الحسابي في هذه الحالة يحسب بعد الحصول على مراكز الفترات، ويفضل تكوين جدول يشتمل على مكونات قانون الوسط الحسابي حتى يسهل التعويض من الجدول في القـــانون الآتي:-

الوسط الحسابي $\bar{س}$ = $\frac{\text{مجـــموع حاصل ضرب (مراكز الفترات × التكرار المقابل لها)}}{\text{مجـــموع التكرارات}}$

أي أن الوسط الحسابي ($\bar{س}$) = $\frac{\text{مجـــ (س × ك)}}{\text{مجـــ ك}}$

حيث س هي مراكز الفترات، ك هي التكرار المقابل لها.

وكذلك توجد طرق أخرى لإيجاد الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي، ويحسب الوسط الحسابي في هذه الحالة بالقانون من خلال تكوين جدول يشتمل على عناصر القانون الآتي:-

$$\text{الوسط الحسابي } \overline{س} = \text{الوسط الفرضي} + \frac{\text{مجـــموع (انحرافات القيم عن الوسط الفرضي} \times \text{ك)}}{\text{مجـــموع التكرارات}}$$

$$\overline{س} = \text{الوسط الفرضي} + \frac{\text{مجـــ}[(\text{س} - \overline{س})\ \text{ك}]}{\text{مجـــ ك}}$$

مـــثال:-

أوجد الوسط الحسابي للبيانات التالية:-

الفترات	20 -	25 -	30 -	35 -	45 - 40
التكرار	5	3	10	8	4

الحـــل:-

نقوم بتكوين جدول يشتمل على بيانات القانون كما يلي:-

$$\text{مراكز الفترات} = \frac{\text{بداية الفترة + نهاية الفترة}}{2}$$

$$\text{للفترة الأولى} = \frac{25 + 20}{2} \quad 22.5$$

$$\text{أو مركز الفترة} = \text{بداية الفترة} + \frac{1}{2} \text{ طول الفترة}$$

$$\text{فمثلاً} = 20 + \frac{1}{2} \times 5$$

$$= 20 + 2.5 = 22.5$$

وهكذا لباقي الفترات

الفترات	التكرارات	مراكز الفترات س	س × ك
20 –	5	22.5	112.5 = 22.5 × 5
25 –	3	27.5	82.5 = 27.5 × 3
30 –	10	32.5	325 = 32.5 × 10
35 –	8	37.5	300 = 37.5 × 8
45 – 40	4	42.5	170 = 42.5 × 4
المجـــــموع	30		990
	مجـــ ك		مجـــ (س × ك)

نعوض في القانون من الجدول كما يلي:-

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ (س × ك)}}{\text{مجـــ ك}}$$

$$= \frac{990}{30} = 33$$

*** طريقة أخرى لحساب الوسط الحسابي لنفس المثال**

إيجاد الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي

في هذه الحالة نستخدم انحرافات القيم عن الوسط الفرضي، وذلك من خلال الجدول كما يلي:-

الفترات	التكرارات	مراكز الفترات س	(س – $\bar{س}$)	(س – $\bar{س}$) × ك
20 –	5	22.5	10–	50–
25 –	3	27.5	5–	15–
30 –	10	32.5	0	0
35 –	8	37.5	5	40
45 – 40	4	42.5	10	40
المجموع	30			65– 80+

مجـــ ك +15

ملاحظات هامة:-

1- نختار الوسط الفرضي من الجدول بحيث يكون هو مركز الفترة المقابل لأكبر تكرار.

2- انحرافات مراكز الفترات عن الوسط الفرضي يكون الانحرافات السابقة له (العليا) سالبة والانحرافات اللاحقة (السفلى) موجبة.

3- نحسب المجموع الجبري لحاصل ضرب الانحرافات × التكرارات كما في العمود (س - $\bar{س}$) × ك.

$$\text{الوسط الحسابي} = \text{الوسط الفرضي} + \frac{\text{مجـــ}[(\text{س} - \bar{س})\ \text{ك}]}{\text{مجـــ ك}}$$

$$= \frac{15}{30} + 32.5$$

$$= 32.5 + 0.5 = 33$$

3- إيجاد الوسط الحسابي للجداول التكرارية ذات الفترات باستخدام الوسط الفرضي.

مثال:-

أوجد الوسط الحسابي من الجدول التالي باستخدام الوسط الفرضي:-

الحـــل:- نفرض أن $\bar{س}$ = 6

الفترات (س)	التكرارات (ك)	مركز الفترة	(س - $\bar{س}$)	(س - $\bar{س}$) × ك
1 -	2	2	4-	8-
3 -	4	4	2-	8-
5 -	5	6	0	0
7 -	3	8	2	6
9 - 11	1	10	4	4
المجموع	15			16- = 6- 10+

$$\text{الوسط الحسابي} = \text{الوسط الفرضي} + \frac{\text{مجـــ}[(\text{س} - \bar{س})\ \text{ك}]}{}$$

$$= 6 + \frac{(6-)}{15} = 6 - 0.4 = 5.6$$

مجـــ ك

أمثلة محلولة على الوسط الحسابي:-

1- أوجد المتوسط الحسابي للبيانات التالية:-

القيم	9	10	14	17	15	19	المجموع
التكرار	1	2	3	2	1	3	12

الحـــــل:-

الوسط الحسابي في هذه الحالة = $\frac{\text{مجـــ س} \times \text{ك}}{\text{مجـــ ك}}$

$$\overline{\text{س}} = \frac{3 \times 19 + 1 \times 15 + 2 \times 17 + 3 \times 14 + 2 \times 10 + 1 \times 9}{3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1}$$

$$\overline{\text{س}} = \frac{57 + 15 + 34 + 42 + 20 + 9}{12} = \frac{177}{12}$$

$$= 14.75$$

2- أوجد الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي للبيانات التالية:-

الفئة	- 48	- 53	-58	- 63	- 68	- 73
التكرار	3	2	6	4	2	3

الحـــــل:-

نقوم بتكوين جدول كما يلي:-

الفئات	التكرار	مراكز الفئات (س)	(س − $\bar{س}$)	(س − $\bar{س}$) × ك (انحرافات مراكز الفترات عن الوسط الفرضي × التكرار المقابل)
48 −	3	50.5	10−	30− = 3 × 10−
53 −	2	55.5	5−	10− = 2 × 5−
58 −	6	60.5 = ف	0	0
63 −	4	65.5	5	20 = 4 × 5
68 −	2	70.5	10	20 = 2 × 10
78 − 73	3	75.5	15	45 = 3 × 15
المجموع	20			40− 85+ 45 =

نفرض أن الوسط الفرضي (ف) = 60.5

بالتعويض في القانون التالي من الجدول:-

$$\text{الوسط الحسابي} = \text{الوسط الفرضي} + \frac{\text{مجموع حاصل ضرب انحرافات مراكز الفترات عن الوسط الفرضي} \times \text{التكرار المقابل}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$= 60.5 + \frac{45}{20}$$

$$= 60.5 + 2.25 = 62.75$$

ثانياً:- إيجاد الوسط الحسابي لنفس المثال بالطريقة العادية.

أي باستخدام القانون:-

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـــ (س} \times \text{ك)}}{\text{مجـــ ك}}$$

وذلك من خلال الجدول الآتي:-

الفئات	التكرارات ك	مراكز الفئات س	(س × ك)
48 -	3	50.5	151.5
53 -	2	55.5	111.0
58 -	6	60.5	363.0
63 -	4	65.5	262.0
68 -	2	70.5	141.0
78 - 73	3	75.5	226.5
المجموع	20		1255

بالتعويض من الجدول في القانون الآتي:-

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـ (س} \times \text{ك)}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{1255}{20} = 62.75$$

نلاحظ أنه مهما تغيرت طريقة حساب الوسط الحسابي فإن النتيجة ثابتة.

إيجـــاد الوســـيط

أولاً:- لإيجاد الوسيط في حالة القيم المفردة، مثل (2، 3، 7، 5، 11)

1- نرتب القيم المفردة ترتيباً تصاعدياً، كما يلي:-

(2، 3، 5، 7، 11) عددهم 5 أعداد (ن = 5 فردية).

2- نحصل على رتبة الوسيط (موضعه).

- في حالة القيم التي عددها ن فردي يكون رتبة الوسيط = $\frac{ن+1}{2}$

فتكون في هذه الحالة $ر_2$ = $\frac{1+5}{2}$ = $\frac{6}{2}$ = 3 (الحد الثالث)

حيث $ر_2$ هو رمز الوسيط، ثم نبحث في القيم نجد أن العدد الذي رتبته 3 هو العدد الذي قيمته 5

أي أن الوسيط = 5

- في حالة القيم التي عددها (ن) زوجي.

تكون رتبة الوسيط ما بين رتبتين هما $\frac{ن}{2}$ ، $\frac{ن}{2}+1$

ثم نأخذ متوسط القيمتين المقابلتين للرتبتين $\frac{ن}{2}$ ، $\frac{ن}{2}+1$

وهي قيمة الوسيط في هذه الحالة، كما في المثال التالي:-

مثال:-

أوجد الوسيط للقيم التالية: (2، 5، 3، 7، 11، 15)

الحل:-

هذه القيم عددها ن = 6 (زوجي)

نرتب القيم تصاعدياً (2، 3، 5، 7، 11، 15).

$\frac{ن}{2}$ = $\frac{6}{2}$ = 3 (الحد الثالث)

$\frac{ن}{2}+1$ = $\frac{6}{2}+1$ = 3 + 1 = 4 (الحد الرابع)

رتبة الوسيط عند الرتبتين (3، 4)

وقيمة الوسيط هي القيمة الوسطى المقابلة لهذه الرتبة التي بينهما وهي متوسط القيمتين المقابلتين للرتبتين (3، 4) أي متوسط القيمتين (5، 7)

$$\text{الوسيط} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

ثانياً:- الوسيط للجداول التكرارية ذات الفترات

الوسيط في هذه الحالة يعتمد على تكوين جدول تكرار متجمع صاعد أو نازل.

مثال:-

أوجد الوسيط للبيانات التالية:-

الفترات	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -
التكرارات	8	10	12	18	5	7

الجواب:-

أولاً: نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد التالي:-

الفترات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
10 -	8	8	60
20 -	10	18	52
30 -	12	30	42
40 -	18	48	30
50 -	5	53	12
60 -	7	60	7
المجموع	60		

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{60}{2} = 30$$

في هذه الحالة الوسيط = نهاية الفترة الوسطية فقط لأنها هي نفسها القيمة الموجودة في التكرار الصاعد.

أي أن الوسيط = 40

إيجاد الوسيط باستخدام الرسم البياني:-

أوجد الوسيط في البيانات التالية باستخدام الرسم البياني.

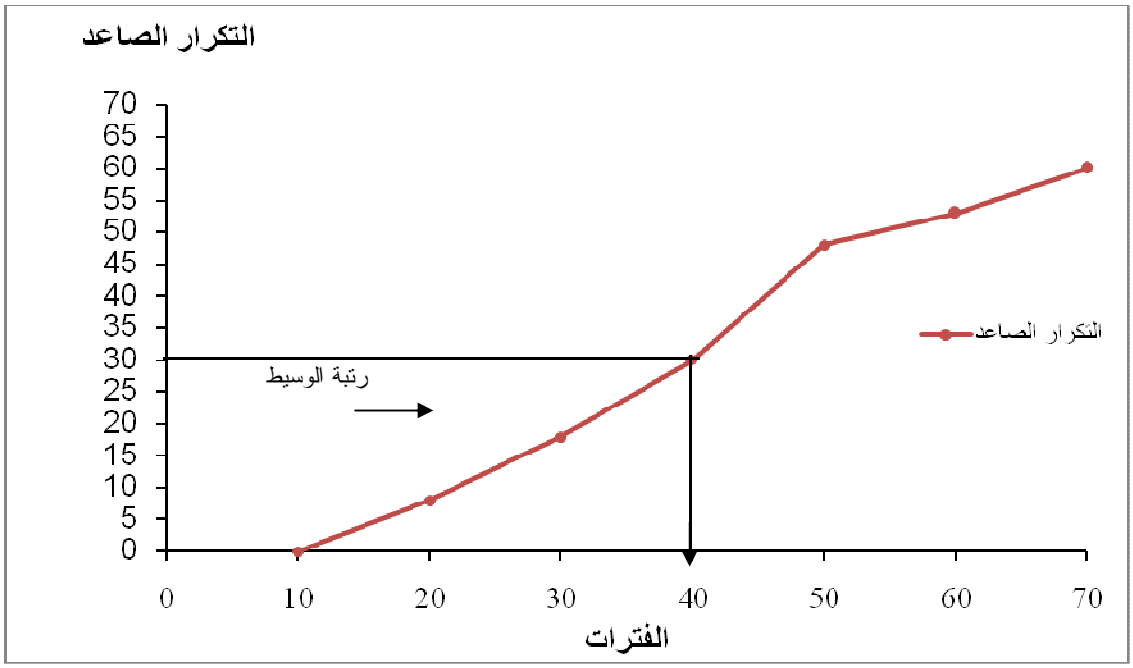
الفترات	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	70 - 60
التكرارات	8	10	12	18	5	7

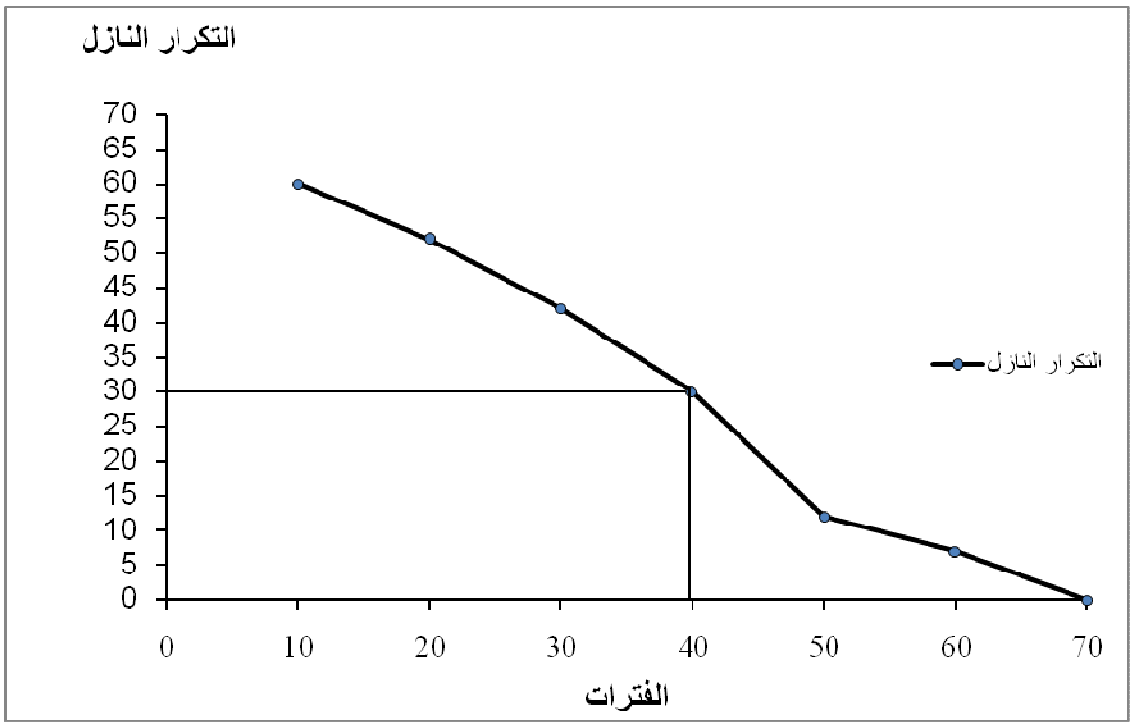
نرسم خطاً أفقياً يمثل الفترات، وخطاً رأسياً يمثل التكرار المتجمع الصاعد أو التكرار النازل، وذلك بعد تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد أو جدول التكرار المتجمع النازل.

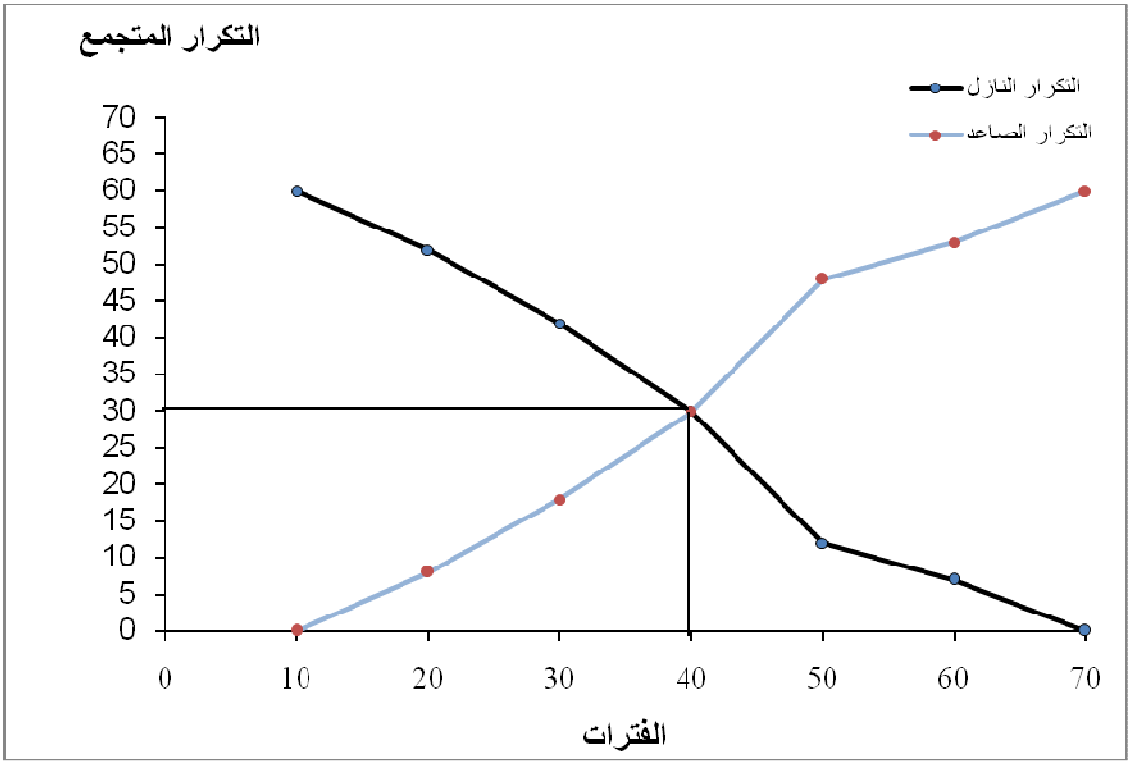
هناك ثلاث حالات لإيجاد الوسيط بالرسم البياني هي:-

1. باستخدام جدول التكرار المتجمع الصاعد فقط (المنحنى المتجمع الصاعد) يكون الوسيط هو القيمة المقابلة لرتبة رتبة الوسيط = $\frac{ك}{2}$ وذلك بإسقاط عمود من نقطة التقاطع المقابلة والتي تقع على المنحنى مقابل لرتبة الوسيط.
2. باستخدام جدول التكرار المتجمع النازل فقط: (المنحنى المتجمع النازل) بنفس الطريقة المتبعة في (1).
3. باستخدام جدولي التكرار المتجمع الصاعد والنازل: يكون الوسيط هو النقطة الواقعة على خط الفترات والمقابلة لنقطة تلاقي المنحنى المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع النازل، وذلك كما يتضح من الرسم الآتي:-

الفترات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
10 -	8	8	60
20 -	10	18	52
30 -	12	30	42
40 -	18	48	30
50 -	5	53	12
70 - 60	7	60	7
المجموع	60		


التكرار الصاعد
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
10
20
30
40
50
60
70
الفترات
رتبة الوسيط
التكرار الصاعد


التكرار النازل
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
10
20
30
40
50
60
70
الفترات
التكرار النازل


التكرار المتجمع
التكرار النازل
التكرار الصاعد
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
10
20
30
40
50
60
70
الفترات

حساب الربيع الأعلى والربيع الأدنى

ملاحظات: نستنتج من المحاضرة السابقة أن ...

1- رتبة الوسيط هي عند 50 % من القيم أي عند $\frac{ن}{2}$ أو $\frac{\text{مجـــ ك}}{2}$

2- رتبة الربيع الأدنى هي عند 25% من القيم أي عند $\frac{ن}{4}$ أو $\frac{\text{مجـــ ك}}{4}$

3- رتبة الربيع الأعلى هي عند 75 % من القيم أي عند $\frac{3\ ن}{4}$ أو $\frac{3}{4}$ مجـــ ك

مثال (1):-

أوجد الوسيط والربيع الأعلى والربيع الأدنى للبيانات التالية:-

الفترات	20-	- 25	- 30	- 35	- 40
التكرارات	5	3	10	8	4

الحـــــل:-

1- نستخدم القوانين التالية لحساب المطلوب.

$$\text{الوسيط} = \text{بداية الفترة الوسطية} + \frac{\frac{ن}{2} - \text{التكرار السابق من الجدول الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة}$$

$$\text{الربيع الأعلى} = \text{بداية فترة الربيع الأعلى} + \frac{\frac{3\ ن}{4} - \text{التكرار السابق من الجدول الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة}$$

$$\text{الربيع الأدنى} = \text{بداية فترة الربيع الأدنى} + \frac{\frac{ن}{4} - \text{التكرار السابق من الجدول الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة}$$

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي، ثم نعوض من الجدول في القوانين:-

الفترات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد
- 20	5	5
- 25	3	8
- 30	10	18
- 35	8	26
- 40	4	30
المجموع	30	

رتبة الوسيط = $\frac{30}{2}$ = 15

رتبة الربيع الأدنى = $\frac{30}{4}$ = 7.5

رتبة الربيع الأعلى = $\frac{3}{4} \times 30$ = 22.5

من الجدول بالتعويض في القوانين نجد أن:-

الربيع الأدنى = $25 + 5 \times \frac{5 - \frac{30}{4}}{3}$

$= 25 + \frac{5 \times 2.5}{3} = 25 + \frac{12.5}{3}$

$= 25 + 4.16 = 29.16$

الوسيط = $30 + 5 \times \frac{8 - \frac{30}{2}}{10}$

$= 30 + 5 \times \frac{7}{10} = 30 + \frac{35}{10}$

$= 30 + 3.5 = 33.5$

الربيع الأعلى = 35 + $\frac{18}{}$ × 5

= 35 + $\frac{18 - 22.5}{8}$ × 5

= 35 + 2.8

= 37.5

أمثلة محلولة على الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى:-

مثال (1):-

أوجد الوسيط والربيع الأعلى والربيع الأدنى للبيانات التالية

الفترات	5 -	10 -	15 -	20 -	25 -	30 -	المجموع
التكرارات	10	8	12	18	5	7	60

الحل:-

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد ثم نعوض منه في القوانين كما يلي:-

الفترات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد
5 -	10	10
10 -	8	18
15 -	12	30
20 -	18	48
25 -	5	53
30 -	7	60
المجموع	60	

ر$_1$ = رتبة الوسيط = $\frac{60}{2}$ = 30

ر$_2$ = رتبة الربيع الأدنى = $\frac{60}{4}$ = 15

ر$_3$ = رتبة الربيع الأعلى = $\frac{3}{4}$ × 60 = 45

$$\text{الوسيط} = \text{بداية الفترة الوسطية} + \frac{\text{التكرار السابق من الجدول الصاعد} -}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة}$$

$$= 15 + 5 \times$$
$$= 20$$

$$\text{الربيع الأدنى} = \text{بداية فترة الربيع الأدنى} + \frac{\text{التكرار السابق من الجدول الصاعد} -}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة}$$

$$= 10 + 5 \times \frac{10 - 15}{8}$$
$$= 10 + \frac{5 \times 5}{8} = 10 + \frac{25}{8}$$
$$= 10 + 3.125 = 13.125$$

$$\text{الربيع الأعلى} = \text{بداية فترة الربيع الأعلى} + \frac{\text{ك} - \text{التكرار السابق من الجدول الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة}$$

$$= 20 + 5 \times \frac{30 - 45}{18}$$
$$= 20 + 5 \times \frac{15}{18} = 20 + \frac{75}{18}$$
$$= 20 + 3.16 = 23.16$$

1- أوجد الوسيط للبيانات التالية

(4، 6، 10، 9، 5)

الحـــــل:-

رتبة الوسيط = $\frac{\text{ن}+1}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$ (الحد الثالث)

نرتب المفردات ترتيباً تصاعدياً كما يلي:-

(4، 5، 6، 9، 10) (عدد فردي = 5 أعداد)

رتبة الوسيط هي 3 أي الوسيط هو الحد الثالث

أي الوسيط = 6

2- أوجد الوسيط للبيانات التالية..

(3، 6، 15، 8، 10، 7)

الحل:-

رتبة الوسيط في هذه الحالة $\frac{ن}{2}$، $1 + \frac{ن}{2}$

$= \frac{6}{2} = 3$ ، $1 + \frac{6}{2} = 1 + 3 = 4$

أي أن الوسيط بعد ترتيب القيم يكون كما يلي:-

(3، 6، 7، 8، 10، 15) عددهم زوجي = 6 أعداد.

الوسيط هو متوسط القيمتين 7 و 8

أي أن الوسيط = $\frac{8+7}{2} = 7.5$

3- أوجد الوسيط للبيانات التالية ثم أوجد الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

الفترات	30-	40 -	50 -	60 -	70 -	80 -	90 -
التكرارات	3	6	6	11	8	5	1

الحـــــل:-

نقوم بتكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي:-

الفترات	التكرارات	التكرار الصاعد

3	3	30 –
9	6	40 –
15	6	50 –
26	11	60 –
34	8	70 –
39	5	80 –
40	1	100 – 90
	40	المجموع

$$ر_2 = \text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$ر_1 = \text{رتبة الربيع الأدنى} = \frac{\text{مجـ ك}}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

$$ر_3 = \text{رتبة الربيع الأعلى} = \frac{3}{4} \text{ مجـ} = \frac{3}{4} \times 40 = 30$$

بالتعويض من الجدول في قوانين الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى كما يلي:-

$$\text{الوسيط} = \text{بداية الفترة الوسطية} + \frac{\frac{\text{مجـ ك}}{2} - \text{التكرار السابق من الجدول الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة}$$

$$\text{الوسيط} = 60 + \frac{20 - 15}{11} \times 10$$

$$= 60 + \frac{10 + 5}{11} = 60 + \frac{50}{11}$$

$$= 60 + 4.54 = 64.54$$

$$\text{الربيع الأدنى} = \text{بداية فترة الربيع الأدنى} + \frac{\frac{\text{مجـ ك}}{4} - \text{التكرار السابق من الجدول الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة}$$

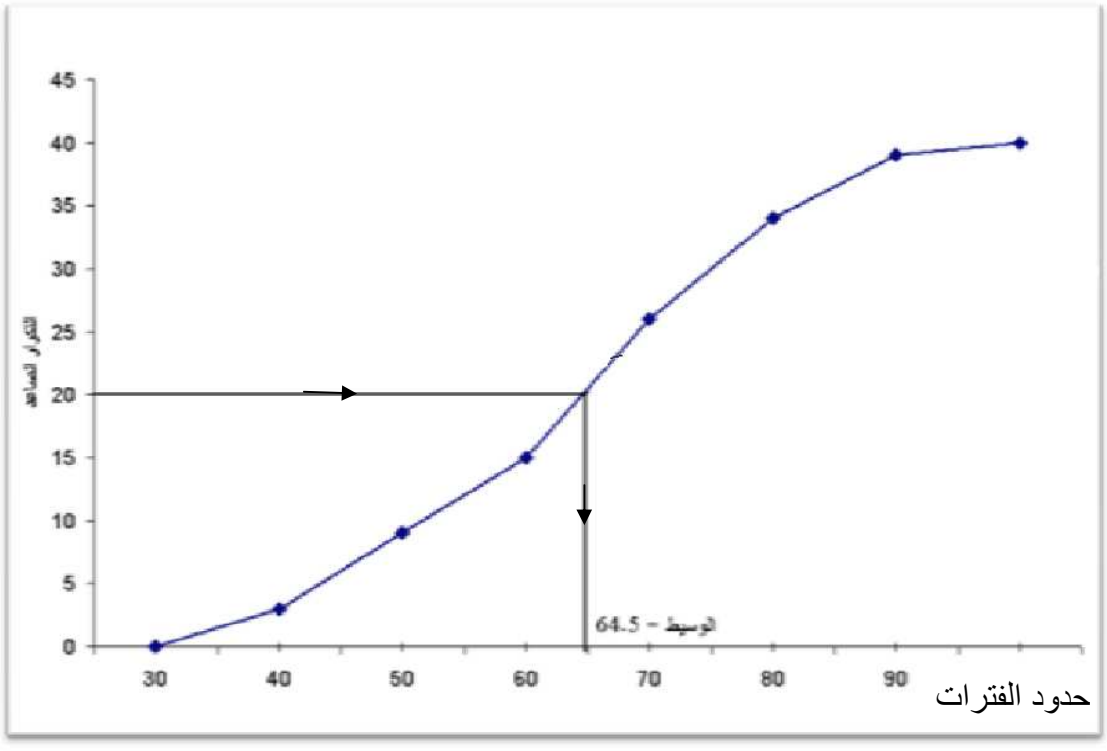
$$\text{الربيع الأدنى} = 50 + \frac{10-9}{6} \times 10$$

$$\frac{10\times1}{6} + 50 =$$
$$1.66 + 50 = 51.66$$

الربيع الأعلى = بداية فترة الربيع الأعلى + $\frac{\text{ك} - \text{التكرار السابق من الجدول الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}}$ × طول الفترة

الربيع الأعلى $= 70 + \frac{26-30}{8} \times 10$
$$70 + \frac{10\times4}{8} =$$
$$70 + 5 = 75$$

إيجاد الوسيط باستخدام الرسم البياني



المنـــــــــوال

تعريف المنوال:-

هو القيمة الأكثر شيوعاً أو الأكثر تكراراً من بين القيم المعطاة، أولاً: يعـرف المنـوال بالنسبة للقيم المفردة من خلال النظر إلى القيم والتعرف على القيمة الأكثر تكـراراً أو الأكثـر شيوعاً، وهذه القيمة في المفردات (3، 7، 5، 2، 5) هي القيمة (5) لأنها تكـررت أكثـر مـن غيرها.

طرق الحصول على المنوال لأنواع البيانات التالية:-

أولاً:- بيانات مفردات مثل (3، 7، 5، 11، 2، 5).

المنوال = 5

ثانياً:- المنوال للقيم المفردة ذات تكرارات مثل

القيم	3	6	5	9
التكرار	4	2	3	1

لإيجاد المنوال في هذه الحالة يكون بمجرد النظر في الجدول نجد أن المنوال هو القيمـة المقابلة لأكبر تكرار، وهذه القيمة في هذه المسألة هي القيمة (3) لأنها تكررت أربع مرات أكثر من غيرها، ولأنها تقابل أكبر تكرار وهو 4.

ثالثاً:- المنوال للبيانات ذات الفترات لها تكرار كما في المثال التالي:-

الفترات	20 -	25 -	30 -	35 -	45 - 40
التكرار	5	3	10	8	4

في هذه الحالة نستخدم أحد الطرق الآتية:-

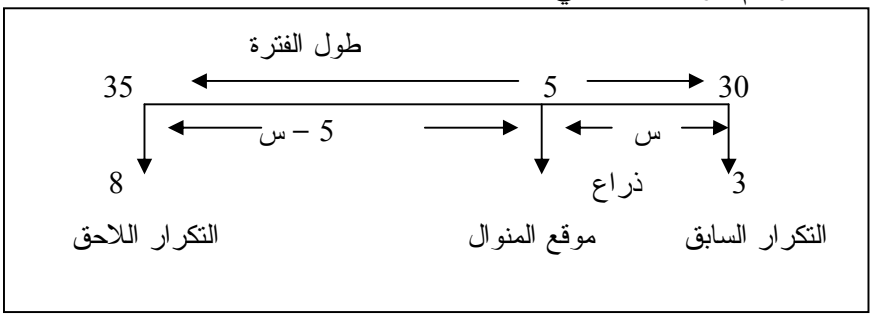
1- طريقة الرافعة.
2- طريقة الفروق (بيرسون).

3- الطريقة البيانية.

باستخدام القانون: المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

أولاً: باستخدام طريقة الرافعة

نرسم الرافعة كما يلي:-



نطبق في قانون الرافعة هو:-

القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

3 × س = 8 (5 – س)

3 س = 8 × 5 – 8 س

3 س = 40 – 8 س

3 س + 8 س = 40

11 س = 40

س = $\frac{40}{11}$ = $3\frac{7}{11}$ = 3.6 وهو موقع لمنوال في الفترة المنوالية

بالتعويض في قانون المنوال وهو

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

حيث س هي موقع (بعد المنوال عند بداية الفترة المنوالية).

المنوال في هذه المسألة = 30 + 3.6 = 33.6

ثانياً:- باستخدام طريقة الفروق (بيرسون)

نكون جدول الفروق كما يلي:-

الفـــرق	التـــكرار	الفـــترات
الفرق العلوي ← 7	3	35 - 30
	10	
الفرق السفلي ← 2	8	

حيث س هي بعد المنوال عن بداية الفترة المنوالية

من الجدول نجد أن

$\frac{7}{2} = \frac{س}{5 - س}$ بضرب الطرفين في الوسطين

$7 (5 - س) = 2 \times س$

$35 - 7س = 2 س$

$35 = 2 س + 7 س$

$35 = 9 س$

$س = \frac{35}{9} = 3.8$

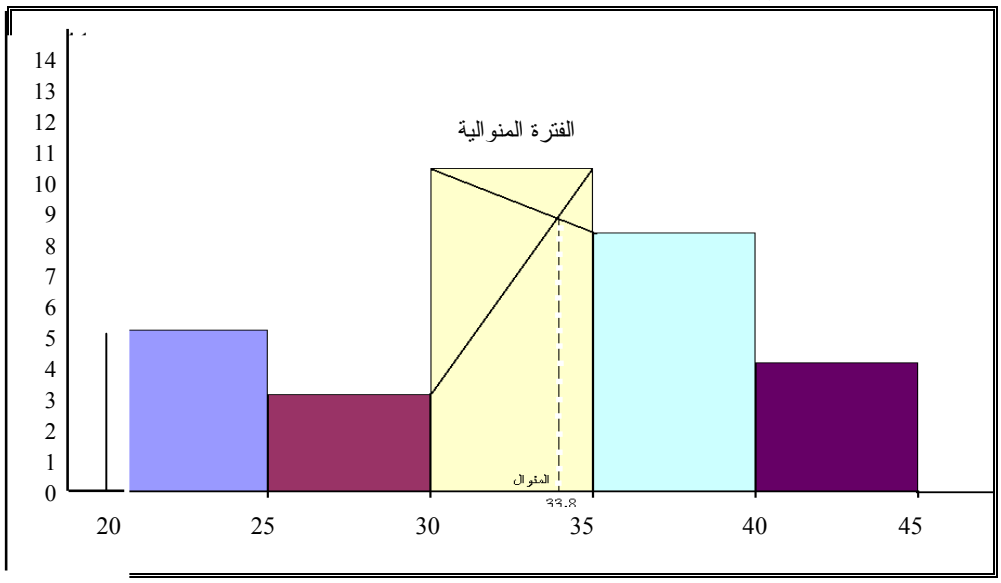
المنوال $= 30 + س = 30 + 3.8 = 33.8$

ملاحظة:- المنوال قيمة تكون تقريبية بين طريقتي الرافعة والفروق.

ثالثاً:- المنوال بطريقة الرسم البياني

نرسم المدرج التكراري ثم نحصل على المنوال على خط الفترات (الأفقي)، كما يتضـــح من الرسم.

نلاحظ من الرسم أن المنوال = 33.8.



1- الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لأوزان خمسين طفلاً بالكيلوجرام.

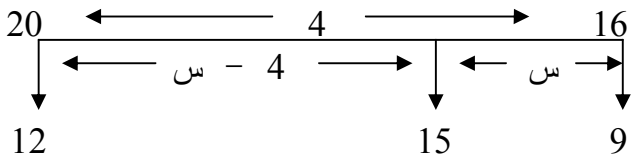
فئة الوزن	- 4	- 8	- 12	- 16	- 20	- 24	- 30
عدد الأطفال	5	4	9	15	12	2	3

المطلوب: إيجاد المنوال لهذه البيانات بطريقتي الرافعة وبيرسون.

الجواب:-

أولاً: طريقة الرافعة لإيجاد المنوال

قانون الرافعة هو: القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها



نبحث عن قيمة س التي توضح مكان المنوال في الفترة المنوالية باستخدام الرافعة

$9 \times س = 12 (4 - س)$

$9 س = 48 - 12 س$

$$9 س + 12 س = 48$$

$$21 س = 48 \qquad س = \frac{48}{21} = 2.26$$

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

$$= 16 + 2.26 = 18.26$$

ثانياً:- طريقة بيرسون (الفروق)

نحسب قيمة س باستخدام الفروق.

الفروق	التكرار المقابل والسابق واللاحق	الفترة المنوالية
6	9	
	15	20 - 16
3	12	

$$\frac{س}{4 - س} = \frac{6}{3}$$

$$3 س = 6 (4 - س)$$

$$3 س = 24 - 6 س$$

$$9 س = 24 \Leftarrow س = \frac{24}{9} = 2\frac{6}{9} = 2.66$$

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

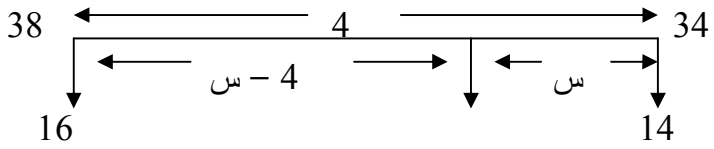
المنوال المطلوب = 16 + 2.66 = 18.66

2- أوجد المنوال بطريقتين مختلفتين.

الفـــــئة	26 -	30 -	34 -	38 -	42 - 46	المجموع
التكرار	13	14	25	16	12	80

الحـــــل:-

أولاً: طريقة الرافعة لإيجاد المنوال



$14\ س = 16\ (4 - س)$

$14\ س = 64 - 16\ س$

$30\ س = 64 \Leftarrow س = \frac{64}{30} = 2.13$

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

$= 34 + 2.13 = 36.13$

ثانياً:- طريقة بيرسون (الفروق)

نحسب قيمة س باستخدام الفروق.

الفترة المنوالية	الفروق	تكرارات الفترات المنوالية
	11	14
38 – 34	0	25
	9	16

$\frac{11}{9} = \frac{س}{4 - س}$

$11\ (4 - س) = 9\ س$

$44 - 11\ س = 9\ س$

$44 = 20\ س \Leftarrow س = \frac{44}{20} = 2\frac{4}{20} = 2.2$

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

$= 34 + 2.2 = 36.2$

حل آخر:-

$$\text{المنوال} = \text{بداية الفترة المنوالية} + \frac{(\text{أكبر تكرار} - \text{التكرار السابق له})}{(\text{أكبر تكرار} - \text{التكرار السابق له}) + (\text{أكبر تكرار} - \text{التكرار اللاحق له})} \times \text{طول الفترة}$$

والفترة المنوالية هي الفترة التي تقابل أكبر تكرار

ومن الجدول السابق نجد أن الفترة المنوالية هي (34 – 38) وطولها = 4

$$\text{المنوال} = 34 + \frac{(14-2!}{(16-25)+(1} \times 4$$

$$= 34 + \quad \times 4$$

$$= 34 + \quad = 34 + 2.2 = 36.2$$

خواص المتوسط الحسابي – الوسيط - المنوال

أولاً:- خواص المتوسط الحسابي

1- مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي أقل ما يمكن.

مجـــ $(س - \overline{س})^2$ = أقل ما يمكن

2- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفر.

أي أن محـــ $(س - \overline{س})$ = صفر

3- إذا كان لدينا عدد من أزواج القيم المتغيرين (س ، ص) لظاهرتين مستقلتين، فإن المتوسط الحسابي لمجموع قيم الظاهرتين معاً يساوي مجموع المتوسط الحسابي لكل من الظاهرتين منفردتين، أي أنـــه إذا كـــان $ك_1 = س_1 \pm ص_1$ ، $ك_2 = س_2 \pm ص_2$ ، ....

$ك_ن = س_ن \pm ص_ن$

فإن مجـــ ك = مجـــ س ± مجـــ ص

وبالقسمة على ن فإن $\overline{ك} = \overline{س} \pm \overline{ص}$

4- لا يمكن حسابه في حالة البيانات النوعية.

5- يتأثر بالقيم المتطرفة.

6- لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة، وذلك لعدم قدرتنا على تحديد مركز الفئة المفتوحة.

7- تدخل جميع القيم في حسابه.

8- يعتبر من أكثر المقاييس استخداماً في الإحصاء.

9- أكثر مقاييس النزعة المركزية ثباتاً من عينة إلى عينة أخرى.

10- أكثر مقاييس النزعة المركزية دقة في حسابه.

ثانياً:- خواص الوسيط

1- هو مؤشر مفيد لمعرفة النزعة المركزية لمجموعة من البيانات والتي منها التوزيعات ذات الفترات المفتوحة والتوزيعات ذات القيم المتطرفة.

2- أسهل في حسابه من المتوسط الحسابي.
3- أقل دقة وثباتاً من المتوسط الحسابي من عينة لأخرى.
4- استخداماته محدودة بالنسبة لاستخدامات المتوسط الحسابي في الإحصاء.
5- لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
6- يمكن معرفته وحسابه بالرسم البياني.

ثالثاً:- خواص المنوال

1- المنوال هو مؤشر سريع لمعرفة النزعة المركزية لمجموعة من البيانات.
2- يستخدم في الأغراض الاجتماعية أو الاقتصادية لسهولة معرفته.
3- أقل استخداماً في العمليات الإحصائية الأكثر عمقاً.
4- لا يأخذ في الاعتبار كل القيم المعطاة.
5- أقل ثباتاً ودقة لأنه يتغير من عينة إلى أخرى لنفس المجتمع.

ومما سبق فإن مقاييس النزعة المركزية الثلاث يمكن ترتيبها حسب أهميتها وكثرة استخداماتها في الإحصاء كما يلي:-

(المتوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال)

وهذا لا يتعارض مع أن كلاً منها له استخدماته لا يستطيع المقياسان الآخران القيام بها، بعض الأحيان تتساوى قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لبعض العينات. ويكون فيها المنحنى الممثل لهذه العينة منحنى متماثل (معتدل) لأن ...

المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال

تمارين عامة على مقاييس النزعة المركزية:-

1- أوجد كلاً من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للقيم الآتية.

(3، 7، 5، 9، 15، 21، 15، 36، 18، 21)

الحل:-

الوسط الحسابي:-

$$= \frac{21 + 18 + 36 + 15 + 21 + 15 + 9 + 5 + 7 + 3}{10}$$

$$= \frac{150}{10} = 15$$

يعتبر الوسيط في هذه الحالة هو متوسط القيمتين المقابلتين للرتبتين $\frac{ن}{2}$ ، $\frac{ن}{2} + 1$

وذلك بعد ترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً كما يلي:-

(3، 5، 7، 9، 15، 15، 18، 21، 21، 36)

$$\frac{ن}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad ، \quad \frac{ن}{2} + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 6$$

الوسيط هو متوسط القيمتين (15 ، 15)

أي أن الوسيط $= \frac{15+15}{2} = 15$

المنوال:-

يوجد منوالين لهذه المسألة وهما (15 ، 21)

2- أوجد المتوسط الحسابي للبيانات التالية:-

القيم	9	10	14	17	15	19	المجموع
التكرار	1	2	3	2	4	3	15

الحـــــل:-

المتوسط الحسابي في هذه الحالة (مفردات لها تكرارات)

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ (س} \times \text{ك)}}{\text{مجـــ ك}} = \frac{\sum (FX)}{\sum f}$$

حيث س هي القيمة المفردة ، ك هو تكرارها.

القيمة (س)	تكرارها (ك)	س × ك
9	1	9
10	2	20
14	3	42
17	2	34
15	4	60
19	3	57
المجموع	15	222

نحسب المتوسط الحسابي من الجدول كما يلي:-

$$\overline{س} = \frac{\text{مجـــ س} \times \text{ك}}{\text{مجـــ ك}} = \frac{222}{15}$$

$$= 14.8$$

3- أوجد الوسط الحسابي للبيانات التالية باستخدام الوسط الفرضي:-

الفئة	- 30	- 40	-50	- 60	- 70	- 80	100- 90
التكرارات	3	6	6	11	8	5	1

الحـــــل:-

نقوم بتكوين جدول كما يلي:- (الوسط الفرضي = 65)

الفئات	**التكرار**	**مراكز الفئات (س)**	**(س - $\overline{س}$)**	**(س - $\overline{س}$) × ك**
- 30	3	35	30 -	90- = 3 × 30-
- 40	6	45	20 -	120- = 6 × 20-
- 50	6	55	10 -	60- = 6 × 10-
- 60	11	65	0	0
- 70	8	75	10	80 = 8 × 10
- 80	5	85	20	100 = 5 × 20
100- 90	1	95	30	30 = 1 × 30
المجموع	40			270 - 210 + 60 -

$$\text{الوسط الحسابي} = 65 + \left(\frac{60 -}{40}\right)$$

$$= 65 - 1.5 = 63.5$$

4- البيانات التالية تمثل أوزان مجموعة من الأطفال، والمطلوب حساب المنوال:-

أ- بطريقة الرافعـــــة .

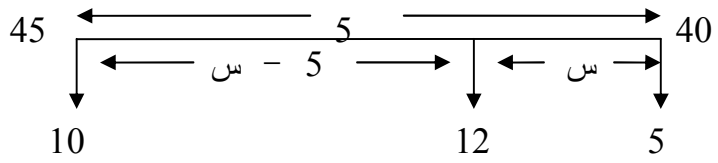
ب- بالطريقة البيانية.

الأوزان	- 30	- 35	- 40	- 45	- 50	- 55
التكرار	3	5	12	10	8	2

الجواب:-

الفترة المنوالية هي 40 – 45 التي تقابل أكبر تكرار

أولاً: طريقة الرافعة



قانون الرافعة هو: القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

$5 \times س = 10 (5 - س)$

$5 س = 50 - 10 س$

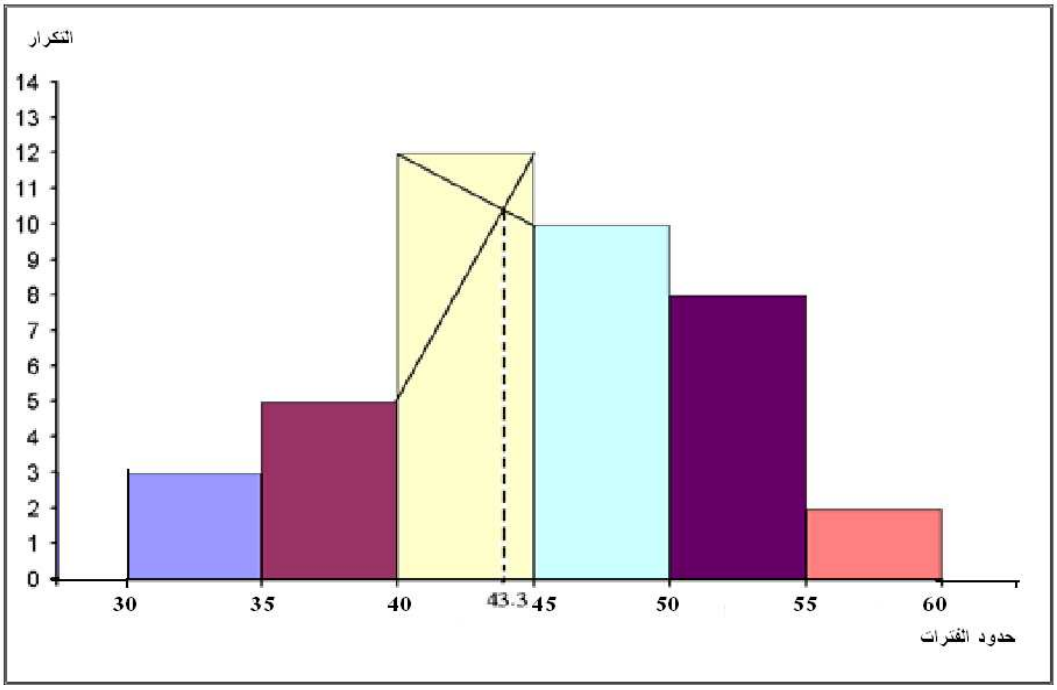
$5 س + 10 س = 50$

$15 س = 50 \qquad س = \frac{50}{15} = 3.3$

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

$= 40 + 3.3 = 43.3$

ثانياً:- الطريقة البيانية

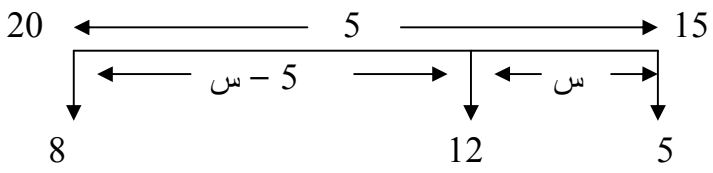


5- أوجد المنوال بطريقتين مختلفتين للبيانات التالية:-

الفـــــئة	- 5	- 10	- 15	- 20	- 25
التكرار	6	5	12	8	9

الحـــــل:-

أولاً: طريقة الرافعة لإيجاد المنوال



$5 \times س = 8 (5 - س)$

$5 س = 40 - 8 س$

$13 س = 40 \Leftarrow س = \frac{40}{13} = 3\frac{1}{13}$

$س = 3.07$

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

$= 15 + 3.07 = 18.07$

ثانياً:- طريقة بيرسون (الفروق)

نحسب قيمة س باستخدام الفروق.

الفروق	التكرار	الفترة المنوالية
7	5	20 - 15
0	12	
4	8	

$\frac{7}{4} = \frac{س}{5 - س}$

$35 - 7 س = 4 س$

$35 = 11 س$

$س = \frac{35}{11} = 3\frac{2}{11} = 3.18$

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

$= 15 + 3.18 = 18.18$

مقاييس التشتت

مقاييس التشتت هي:-

1- المدى.
2- الانحراف الربيعي.
3- متوسط الانحراف المطلق.
4- الانحراف المعياري.
5- معامل الاختلاف.

أولاً:- المدى

وهو عبارة عن الفرق بين أكبر قيمة من بين القيم المعطاة وأصغر من بين نفس القيم.
أي أن المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة للبيانات

مثال 1:-

أوجد المدى للقيم التالية:-

(4، 8، 5، 2، 3، 5، 7، 4، 10)

الحل:-

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

= 10 – 2 = 8

مثال 2:-

أوجد المدى للقيم التالية:-

(2، 4، 9، 3، 4، 5، 6، 1)

الحل:-

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

= 9 – 1 = 8

ملاحظة1:-

نلاحظ أن المدى في المثالين السابقين متساوي رغم اختلاف القيم واختلاف عددها، وهذا يدل على أن المدى يعتبر مقياس غير دقيق للتشتت.

ملاحظة 2:-

المدى للبيانات ذات فترات لها تكرار هو الفرق بين نهاية الفترة الأخيرة وبداية الفترة الأولى كما في المثال التالي:-

مثال:-

أوجد المدى للبيانات التالية:-

الفترات	24-	28-	32-	36-	40-	44-48
التكرارات	6	4	8	15	10	7

الحل:-

المدى في هذه الحالة هو:

المدى = نهاية الفترة الأخيرة – بداية الفترة الأولى

= 48 – 24 = 24

ثانياً:- الانحراف الربيعي

هو نصف البيانات المحصورة بين الربيع الأعلى والربيع الأدنى.

$$\text{أي أن الانحراف الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$$

$$\text{وبالرموز يكون الانحراف الربيعي} = \frac{ر_3 - ر_1}{2}$$

مثال 1:-

من البيانات الآتية أحسب الانحراف الربيعي لدرجات مجموعة من الطلاب في مادة التاريخ الطبيعي. (15، 12، 9، 10، 3، 5، 2).

الحـــــل:-

نقوم بترتيب القيم أولاً كما يلي:-

(2، 3، 5، ، 9، 10، 12، 15).

رتبة $ر_1 = \frac{ن+1}{4} = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2$

$ر_1 = 3$ ..... (1)

رتبة $ر_3 = \frac{3}{4}(ن + 1) = \frac{3}{4}(7 + 1) = 3 \times 2 = 6$

$ر_3 = 12$ ..... (2)

من (1) و (2) يكون

الانحراف الربيعي = $\frac{ر_3 - ر_1}{2} = \frac{12-3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$

مثال (2):-

من البيانات التالية أوجد الانحراف الربيعي.

الفترات	4-8	8-	12-	16-	20-	24 -	28-32
التكرارات	2	3	5	2	4	3	1

الحل:-

نقوم بتكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي:-

الفترات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد
- 4	2	2
- 8	3	5
- 12	5	10
- 16	2	12
- 20	4	16
- 24	3	19
- 28	1	20
المجموع	20	

$$\text{رتبة } ر_1 = \frac{\text{محـــ ك}}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$ر_1 = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{رتبة } ر_3 = \frac{3 \text{ محـــ ك}}{4} = \frac{20 \times 3}{4} = 15$$

$$ر_3 = 20 + 4 \times \frac{12 - 15}{4}$$

$$= 20 + 4 \times \frac{3}{4} = 20 + 3 = 23 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1)، (2) نعوض في قانون الانحراف الربيعي

$$\text{الانحراف الربيعي} = \frac{ر_3 - ر_1}{2} = \frac{12 - 23}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

مثال (2):-

أوجد الانحراف الربيعي للبيانات الآتية:-

الفئات	5 -	10 -	15 -	20 -	25 -	30 -	40-35
التكرار	3	2	5	8	6	3	1

الحـــــل:

أولاً نقوم بتكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي:-

الفترات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد
- 5	3	3
- 10	2	5
- 15	5	10
- 20	8	18
- 25	6	24
- 30	3	27
40 - 35	1	28
المجموع	28	

$$\text{رتبة } ر_1 = \frac{\text{مجـ ك}}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

$$ر_1 = 15 + \frac{5-7}{5} \times 5$$

$$ر_1 = 15 + 2 = 17 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{رتبة } ر_3 = \frac{3}{4} \text{ مجـ ك} = \frac{3}{4} \times 28$$

$$ر_3 = 3 \times 7 = 21$$

$$ر_3 = 25 + \frac{18 - 21}{6} \times 5$$

$$= 25 + \frac{5\times3}{6} = 25 + 2.5$$

$$= 27.5 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1)، (2) نعوض في قانون الانحراف الربيعي

$$\text{الانحراف الربيعي} = \frac{ر_3 - ر_1}{2} = \frac{17 - 27.5}{2} = 5.25$$

متوسط الانحراف المطلق:-

هو عبارة عن متوسط الانحراف المطلق (للقيم عن المتوسط الحسابي لهذه القيم).

أي أن:-

أ- الانحراف المتوسط المطلق $= \dfrac{\text{مجـ} \left| س - \overline{س} \right|}{ن}$

في حالة البيانات (قيم مفردات بدون تكرار).

ب- أما في حالة البيانات ذات مفردات لها تكرارات يكون

الانحراف المتوسط المطلق $= \dfrac{\text{مجـ} \left| س - \overline{س} \right| \times ك}{}$

مجـــ ك

حيث س هي قيمة (مفردة) من القيم، $\overline{س}$ هي المتوسط الحسابي لهذه القيم، ك هو التكرار لكل قيمة.

جـــ- في حالة البيانات ذات فترات لها تكرار يكون:

$$\text{الانحراف المتوسط المطلق} = \frac{\text{محـــ } |س - \overline{س}| \text{ ك}}{\text{مجـــ ك}}$$

حيث س هي مراكز الفترات، $\overline{س}$ هي المتوسط الحسابي للبيانات، ك هو التكرار لكل فترة.

مثال (1):-

أوجد متوسط الانحراف المطلق للقيم الآتية:-

(2، 3، 7، 5، 11).

الحل:-

أولاً نحسب المتوسط الحسابي للقيم، كما يلي:-

$$\text{المتوسط الحسابي } (\overline{س}) = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{\text{محـــ س}}{\text{ن}}$$

$$\overline{س} = \frac{11 + 5 + 7 + 3 + 2}{5}$$

$$= \frac{28}{5} = 5.6$$

$$\text{متوسط الانحراف المطلق} = \frac{\text{محـــ } |س - \overline{س}|}{\text{ن}}$$

$$= \frac{[5.6 - 11] + [5.6 - 5] + [5.6 - 7] + [5.6 - 3] + [5.6 - 2]}{5}$$

$$= \frac{[5.4] + [0.6-] + [1.4] + [2.6-] + [3.6-]}{5}$$

$$= \frac{5.4 + 0.6 + 1.4 + 2.6 + 3.6}{5}$$

$$= \frac{13.6}{5} = 2.72$$

مثال (2):-

أوجد متوسط الانحراف المطلق للبيانات التالية:-

أوجد الانحراف المتوسط للبيانات التالية:-

القيم	3	6	5	9	المجموع
تكرارها	4	2	3	1	10

الجواب:-

أولاً نحسب المتوسط الحسابي كما يلي:-

$$\overline{س} = \frac{\text{مجـ (س} \times \text{ك)}}{\text{مجـ س}}$$

$$\overline{س} = \frac{1\times9 + 3\times5 + 2\times6 + 4\times3}{10}$$

$$\overline{س} = \frac{9 + 15 + 12 + 12}{10} = \frac{48}{10} = 4.8$$

$$\text{متوسط الانحراف المطلق} = \frac{\text{مجـ } |س - \overline{س}| \text{ ك}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{1 \times (4.8-9) + 3 \times (4.8-5) + 2 \times (4.8-6) + 4 \times (4.8-3)}{10}$$

$$= \frac{1 \times 4.2 + 3 \times 0.2 + 2 \times 1.2 + 4 \times 1.8}{10}$$

$$= \frac{4.2 + 0.6 + 2.4 + 7.2}{10}$$

$$= \frac{14.4}{10} = 1.44$$

مثال 3:-

أوجد متوسط الانحراف المطلق للبيانات الآتية:-

الفئات	20 -	25 -	30 -	35 -	40 -	المجموع
التكرارات	5	3	10	8	4	30

الجواب:

نحسب المتوسط الحسابي للقيم ثم نحسب الانحراف للقيم عن المتوسط الحسابي، ومنه نحسب متوسط الانحراف المطلق، وذلك من خلال الجدول الآتي:-

الفترات	التكرار ك	مراكز الفترات س	ك × س	| س - $\bar{س}$ |	| س - $\bar{س}$ | × ك
20 -	5	22.5	112.5	| 33 − 22.5 |	52.5 = 5 × 10.5
25 -	3	27.5	82.5	| 33 − 27.5 |	16.5 = 3 × 5.5
30 -	10	32.5	325	| 33 − 32.5 |	5 = 10 × 0.5
35 -	8	37.5	300	| 33 − 37.5 |	36 = 8 × 4.5
40 -	4	42.5	169	| 33 − 42.5 |	38 = 4 × 9.5
المجموع	30		989		148

$$\text{والمتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ (ك} \times \text{س)}}{\text{مجـــ ك}} = \frac{989}{30} = 32.99 \approx 33$$

$$\text{متوسط الانحراف المطلق} = \frac{\text{محـــ } |س - \bar{س}| \times ك}{\text{محـــ ك}}$$

من الجدول نجد أن:

$$\text{متوسط الانحراف المطلق} = \frac{148}{30} = 4.93$$

الانحراف المعياري والتباين

الانحراف المعياري:-

هو أهم مقاييس التشتت وأدقها ويرمز له بالرمز σ (سيجما)، وهو عبارة عن الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربع انحرافات القيم عن المتوسط الحسابي.

أ- في حالة القيم ذات مفردات بدون تكرار.

يكون الانحراف المعياري

فإن الانحراف المعياري = $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ (س} - \overline{\text{س}})^2}{\text{ن}}}$

كذلك الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{\text{مجـ س}^2}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^2}$

والتباين = مربع الانحراف المعياري = σ^2

ب- في حالة القيم ذات مفردات لها تكرار يكون

الانحراف المعياري = $\sigma = \sqrt{\frac{\text{محـ (س} - \overline{\text{س}})^2 \text{ ك}}{\text{محـ ك}}}$

كذلك الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{\text{محـ س}^2 \times \text{ك}}{\text{محـ ك}} - \left(\frac{\text{محـ س} \times \text{ك}}{\text{محـ ك}}\right)^2}$

التباين = مربع الانحراف المعياري

التباين = $\frac{\text{محـ (س} - \overline{\text{س}})^2 \text{ ك}}{\text{محـ ك}} = \frac{\text{محـ س}^2 \times \text{ك}}{\text{محـ ك}} - \left(\frac{\text{محـ س} \times \text{ك}}{\text{محـ ك}}\right)^2$

حيث س هي المفردة، ك هي تكرار كل مفردة، $\overline{س}$ المتوسط الحسابي للقيم.

جـ- في حالة القيم ذات فترات لها تكرار يكون

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ (س - \overline{س})^2 \times ك}{\text{مجـ}\ ك}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ س^2 \times ك}{\text{مجـ}\ ك} - \left(\frac{\text{مجـ}\ س \times ك}{\text{مجـ}\ ك}\right)^2}$$

$$\text{التباين} = \frac{\text{مجـ}\ (س - \overline{س})^2 \times ك}{\text{مجـ}\ ك} = \frac{\text{مجـ}\ س^2 \times ك}{\text{مجـ}\ ك} - \left(\frac{\text{مجـ}\ س \times ك}{\text{مجـ}\ ك}\right)^2$$

حيث س هي مركز الفترات، $\overline{س}$ هي المتوسط الحسابي للبيانات، ك هي تكرار كل فترة.

مثال (1) على الحالة [أ]:-

أوجد الانحراف المعياري للقيم التالية، ثم احسب التباين:-

(2، 3، 7، 5 ، 11)

الحل:-

س	2	3	7	5	11	28
$س^2$	4	9	49	25	121	208

المجموع

عدد القيم = 5

$$\sigma = \text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\left(\quad\right)^2} = \sqrt{(5.6)^2 - 41.6} = \sqrt{31.36 - 41.6} = \sqrt{10.24}$$

$$= \left(\frac{28}{5}\right)^2 - \frac{208}{5}$$

$$= 3.2$$

التباين = σ^2 = $(\sqrt{10.24})^2$ = $(3.2)^2$ = 10.24

مثال (2):-

إذا كانت درجات 5 طلاب في مادة الإحصاء هي (75، 65، 55، 85، 80) أوجد الانحراف المعياري لهذه الدرجات، ثم احسب التباين لها.

الحـــــل:-

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهـــــا}} = \frac{75 + 65 + 55 + 85 + 80}{5}$$

$$= \frac{360}{5} = 72$$

نكون الجدول التالي لتسهيل التعويض في القانون:-

القيم س	$(س - \bar{س})$	$(س - \bar{س})^2$
75	$75 - 72 = 3$	9
65	$65 - 72 = -7$	49
55	$55 - 72 = -17$	289
85	$85 - 72 = 13$	169
80	$80 - 72 = 8$	64
المجموع		580

أو

القيم س	مربع القيم $(س^2)$
75	5625
65	4225
55	3025
85	7225
80	6400
المجموع 360	26500

بالتعويض في القانون الأول:-

فإن الانحراف المعياري σ = $\sqrt{\frac{\text{مجـــ} (س - \bar{س})^2}{ن}}$ = $\sqrt{\frac{580}{5}}$

= $\sqrt{116}$ = 10.77

والتباين = σ^2 = 116

بالتعويض في القانون الثاني:-

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\text{مجـــ س}^2}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـــ س}}{\text{ن}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{360}{5}\right)^2 - 5300} = \sqrt{(72)^2 - 5300}$$

$$= \sqrt{5184 - 5300} = \sqrt{116}$$

$$= 10.77$$

والتباين $= \sigma^2 = 116$

مثال (3) على الحالة [ب]:-

أوجد الانحراف المعياري للقيم التالية:-

القيمة	3	6	5	9	المجموع
التكرار	4	2	3	1	10

الحل:-

نقوم بتكوين جدول كما يلي:-

القيم س	التكرار ك	$س^2$	س × ك	$س^2$ × ك
3	4	9	3 × 4 = 12	9 × 4 = 36
6	2	36	6 × 2 = 12	36 × 2 = 72
5	3	25	5 × 3 = 15	25 × 3 = 75
9	1	81	9 × 1 = 9	81 × 1 = 81
المجموع	10		48	264

بالتعويض في القانون الآتي:-

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\text{مجـــ س}^2 \text{ ك}}{\text{مجـــ ك}} - \left(\frac{\text{مجـــ س× ك}}{\text{مجـــ ك}}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{264}{10}\right) - \left(\frac{48}{10}\right)^2} = \sqrt{26.4 - (4.8)^2}$$

$$= \sqrt{26.4 - 23.04} = \sqrt{3.36} = 1.83$$

التباين $= \sigma^2 = 3.36$

مثال (4) على الحالة [جـ]:-

أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية، ثم أحسب التباين:-

الفترات	20 -	25 -	30 -	35 -	40 -45	المجموع
التكرارات	5	3	10	8	4	30

الحـــــل:-

نقوم بتكوين الجدول الآتي:-

الفترات	التكرارات ك	مراكز الفئات س	س × ك	$س^2$	$س^2 \times ك$
20 -	5	22.5	112.5	506.25	2531.25
25 -	3	27.5	82.5	756.25	2268.75
30 -	10	32.5	325	1056.25	10562.5
35 -	8	37.5	300	1406.25	11250
45 - 40	4	42.5	170	1806.25	7225
المجموع	30		990		33837.5

بالتعويض في القانون الآتي:-

فإن الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{مجـــ\ س^2 \times ك}{مجـــ\ ك} - \left(\frac{مجـــ\ س \times ك}{مجـــ\ ك}\right)^2}$

نعوض من الجدول في قانون الانحراف المعياري كما يلي:-

$$= \sqrt{\frac{33837.5}{30} - \left(\frac{990}{30}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{1127.9 - (33)^2}$$

$$= \sqrt{1127.9 - 1089} \qquad = \sqrt{38.9}$$

$$= 6.23$$

والتباين $= \sigma^2 = 38.9$

معامل الاختلاف:-

يستخدم معامل الاختلاف عند مقارنة التشتت بالنسبة إلى متغير واحد في عدة مجالات أو مقارنة بتشتت عدة مشاهدات مختلفة.

وهو مقياس نسبي، وتستخدم فيه النسبة المئوية، وهو عبارة عن النسبة بين الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي للعينة المراد معرفة التشتت لها مضروباً في مائة.

$$\text{أي أن معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times 100$$

مثال (1):-

إذا كان أحد المصانع ينتج نوعين من المصابيح الكهربائية، وكان متوسط المدة التي يعيشها المصباح الأول هي 350 وبانحراف معياري 28، وكان متوسط المدة التي يعيشها المصباح من النوع الثاني هو 192 ساعة، وبانحراف معياري 36 ساعة.

والمطلوب: قارن بين التشتـــتين (أيهما أكبر تشتـــتاً).

الحـــل:-

لمعرفة التشتتين نستخدم معامل الاختلاف لكل منهما.

$$\text{معامل الاختلاف للمصابيح الأولى} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times 100$$

$$= \frac{28}{350} \times 100 = 8\%$$

$$\text{معامل الاختلاف للمصابيح الثانية} = \frac{36}{192} \times 100$$

$$= 18.75\%$$

بمقارنة التشتـــتين نلاحظ أن المصابيح من النوع الثاني أكثر تشتتاً من المصابيح من النوع الأول.

مثال (2):-

أوجد معامل الاختلاف للبيانات الموضحة بالجدول التالي:-

القيمة	2	4	6	8
التكرار	1	3	4	2

الحـــــل:-

أولاً نوجد المتوسط الحسابي للبيانات، وكذلك الانحراف المعياري، ثم نستخدم قانون معامل الاختلاف، وذلك كما يلي:-

القيمة (س)	التكرار (ك)	$س^2$	س × ك	$س^2 \times ك$
2	1	4	2	4
4	3	16	12	48
6	4	36	24	144
8	2	64	16	128
المجموع	10		54	324

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ س} \times \text{ك}}{\text{مجـــ ك}} = \frac{54}{10} = 5.4 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\text{فإن الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{\text{محـــ س}^2 \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}} - \left(\frac{\text{محـــ س} \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{324}{10} - \left(\frac{54}{10}\right)^2} = \sqrt{32.4 - 29.16}$$

$$= \sqrt{3.24} = 1.8 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times 100$$

من 1 ، 2 يكون معامل الاختلاف المطلوب $= \frac{1.8}{5.4} \times 100 = 33.3\ \%$

مثال (3):-

إذا قمت بالإنفاق في عدة أيام، وكان معامل الاختلاف (50 %) والانحراف المعياري (4) دينار، فكم يكون متوسط إنفاقك؟

الحـــــل:-

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times 100$$

$$100 \times \frac{4}{\text{المتوسط الحسابي}} = 50$$

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{100 \times 4}{50} = 8$$

مثال (4):-

نفترض أن الانحراف المعياري لدرجات الحرارة في بلد ما هو 5 درجات والمتوسط الحسابي لها هو 15، بينما كان الانحراف المعياري لدرجات الحرارة في بلد آخر هو 8 والمتوسط الحسابي لها هو 40. فما هو معامل الاختلاف لدرجات حرارة البلدين؟

$$\text{معامل الاختلاف لدرجات حرارة البلد الأول} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times 100$$

$$= \frac{5}{15} \times 100 = 33.3\ \%$$

$$\text{معامل الاختلاف لدرجات حرارة البلد الثاني} = \frac{8}{40} \times 100$$

$$= 20\ \%$$

معامل الاختلاف للبلد الأول أكبر من معامل الاختلاف في البلد الثاني.

العـــزوم (Moments)

أولاً:- العزوم حول نقطة الأصل للقيم المفردة بدون تكرار

العزم الأول = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{\text{مجـــ س}}{\text{ن}}$ وهو يساوي الوسط الحسابي

العزم الثاني = $\frac{\text{مجموع مربع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{\text{مجـــ س}^2}{\text{ن}}$

العزم الثالث = $\frac{\text{مجموع مكعب القيم}}{\text{عددها}} = \frac{\text{مجـــ س}^3}{\text{ن}}$

العزم الرابع = $\frac{\text{مجموع الأس الرابع للقيم}}{\text{عددها}} = \frac{\text{مجـــ س}^4}{\text{ن}}$

مثال:-

أوجد العزم الأول والثاني والثالث والرابع للقيم التالية: (2 ، 5 ، 3 ، 7 ، 11)

الحل:-

ن = عدد القيم = 5

العزم الأول = $\frac{\text{مجـــ س}}{\text{ن}} = \frac{11 + 7 + 3 + 5 + 2}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$

العزم الثاني = $\frac{\text{مجـــ س}^2}{\text{ن}} = \frac{^2(11) + ^2(7) + ^2(3) + ^2(5) + ^2(2)}{5}$

$$41.6 = \frac{208}{5} = \frac{121 + 49 + 9 + 25 + 4}{5} =$$

$$\text{العزم الثالث} = \frac{\text{مجـــ س}^3}{\text{ن}} = \frac{^3(11) + ^3(7) + ^3(3) + ^3(5) + ^3(2)}{5}$$

$$366.8 = \frac{1834}{5} = \frac{1331 + 343 + 27 + 125 + 8}{5} =$$

$$\text{العزم الرابع} = \frac{\text{مجـــ س}^4}{\text{ن}} = \frac{^4(11) + ^4(7) + ^4(3) + ^4(5) + ^4(2)}{5}$$

$$3552.8 = \frac{17764}{5} = \frac{1464 + 2401 + 81 + 625 + 16}{5} =$$

ثانياً:- العزوم حول نقطة الأصل للقيم المفردة ذات تكرار

$$\text{العزم الأول} = \frac{\text{محـــ س} \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}} \quad (\text{يساوي المتوسط الحسابي})$$

حيث س هي قيمة كل مفردة، ك هي تكرار هذه المفردة.

$$\text{العزم الثاني} = \frac{\text{محـــ س}^2 \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}}$$

<u>ملاحظة</u>: هناك علاقة بين العزم الأول والعزم الثاني والتباين.

وهي أن **التباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول**

أي أن التباين = (العزم الثاني) – (العزم الأول)^2

$$\text{التباين} = \sigma^2 = \left(\frac{\text{مجـــ س}^2 \times \text{ك}}{\text{مجـــ ك}}\right) - \left(\frac{\text{مجـــ س} \times \text{ك}}{\text{مجـــ ك}}\right)^2$$

$$\text{العزم الثالث} = \frac{\text{مجـــ س}^3 \times \text{ك}}{\text{مجـــ ك}}$$

$$\text{العزم الرابع} = \frac{\text{مجـــ س}^4 \times \text{ك}}{\text{مجـــ ك}}$$

مثال:-

أوجد العزم الأول والثاني والثالث والرابع حول نقطة الأصل والتباين للبيانات التالية:-

القيم	3	6	5	9
التكرارات	4	2	3	1

الجواب:-

يمكننا تكوين جدولاً لتسهيل التعويض في قوانين العزوم كما يلي:-

القيم	التكرار	س × ك	س^2	س^2 × ك	س^3	س^3 × ك	س^4	س^4 × ك
3	4	12	9	36	27	108	81	324
6	2	12	36	72	216	432	1296	2592
5	3	15	25	75	125	375	625	1875
9	1	9	81	81	729	729	6561	6561
المجموع	10	48		264		1644		10056

$$\text{العزم الأول} = \frac{\text{محـــ س} \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}} = \frac{48}{10} = 4.8 = \text{المتوسط}$$

$$\text{العزم الثاني} = \frac{\text{محـــ } (\text{س}^2 \times \text{ك})}{\text{محـــ ك}} = \frac{264}{10} = 26.4$$

التباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول

$= 26.4 - (4.8)^2$

التباين = $26.4 - 23.04 = 3.36$

$$\text{العزم الثالث} = \frac{\text{محـــ } (\text{س}^3 \times \text{ك})}{\text{محـــ ك}} = \frac{1644}{10} = 164.4$$

$$\text{العزم الرابع} = \frac{\text{محـــ } (\text{س}^4 \times \text{ك})}{\text{محـــ ك}} = \frac{10056}{10} = 1005.6$$

ثالثاً:- العزوم حول نقطة الأصل للبيانات ذات فترات لها تكرار

$$\text{العزم الأول} = \frac{\text{محـــ س} \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}} = \text{الوسط الحسابي (المتوسط)}$$

(حيث س هي مراكز الفترات، ك هي تكرار كل فترة).

$$\text{العزم الثاني} = \frac{\text{محـــ } (\text{س}^2 \times \text{ك})}{\text{محـــ ك}}$$

$$\text{العزم الثالث} = \frac{\text{محـــ } (\text{س}^3 \times \text{ك})}{\text{محـــ ك}}$$

$$\text{العزم الرابع} = \frac{\text{مجـ} (\text{س}^4 \times \text{ك})}{\text{مجـ ك}}$$

التباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول

مثال:-

أوجد العزم الأول والثاني والثالث والرابع حول نقطة الأصل، والتباين للبيانات التالية:

الفترات	2 -	6 -	10 -	14 -	18 - 22	المجموع
التكرار	2	5	8	4	1	20

الجواب:-

الفترات	التكرار	مراكز الفترات	س × ك	س^2	$\text{س}^2 \times$ ك	س^3	$\text{س}^3 \times$ ك	س^4	$\text{س}^4 \times$ ك
2 -	2	4	8	16	32	64	128	256	512
6 -	5	8	40	64	320	512	2560	4096	20480
10 -	8	12	96	144	1152	1728	13824	20736	165888
14 -	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
18 - 22	1	20	20	400	400	8000	8000	160000	160000
المجموع	20		228		2928		40896		609024

من الجدول نعوض في قوانين العزوم كما يلي:-

$$\text{العزم الأول} = \frac{\text{مجـ س} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{228}{20} = 11.4$$

$$\text{العزم الثاني} = \frac{\text{مجـ} (\text{س}^2 \times \text{ك})}{\text{مجـ ك}} = \frac{2928}{20} = 146.4$$

التباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول

$= 146.4 - (11.4)^2$

التباين $= 146.4 - 129.96 = 16.44$

$$\text{العزم الثالث} = \frac{\text{مجـــ} (\text{س}^3 \times \text{ك})}{\text{مجـــ ك}} = \frac{40896}{20} = 2044.8$$

$$\text{العزم الرابع} = \frac{\text{مجـــ} (\text{س}^4 \times \text{ك})}{\text{مجـــ ك}} = \frac{609024}{20} = 30451.2$$

ب- العزوم حول المتوسط الحسابي.

أولاً:- العزوم حول المتوسط للقيم المفردة بدون تكرار

ملاحظة هامة: لإيجاد العزوم حول المتوسط الحسابي يجب حساب المتوسط الحسابي أولاً.

$$\text{العزم الأول حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ} (\text{س} - \overline{\text{س}})}{\text{ن}} \quad (\text{دائماً} = \text{صفر})$$

حيث س هي قيمة كل مفردة، و $\overline{\text{س}}$ هي المتوسط الحسابي للمفردات، ن عدد المفردات.

$$\text{العزم الثاني حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ} (\text{س} - \overline{\text{س}})^2}{\text{ن}} = \text{التباين}$$

$$\text{العزم الثالث حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ} (\text{س} - \overline{\text{س}})^3}{\text{ن}}$$

$$\text{العزم الرابع حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ} (\text{س} - \overline{\text{س}})^4}{\text{ن}}$$

مثال (1):-

أوجد العزم الأول والعزم الثاني والعزم الثالث والعزم الرابع حول المتوسط الحسابي للقيم التالية: (5، 3، 4 ، 7 ، 11)، ثم احسب التباين.

الجواب:-

لإيجاد العزوم حول المتوسط الحسابي يجب أن نحسب المتوسط الحسابي أولاً.

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ س}}{\text{ن}} = \frac{11 + 7 + 4 + 3 + 5}{5}$$

$$= \frac{30}{5} = 6$$

$$\textbf{العزم الأول حول المتوسط الحسابي} = \frac{\textbf{مجـــ (س} - \overline{س}\textbf{)}}{\textbf{ن}}$$

$$\text{العزم الأول للقيم} = \frac{(6-7) + (6-11) + (6-4) + (6-3) + (6-5)}{5}$$

$$= \frac{1 + 5 + (2-) + (3-) + (1-)}{5} = \frac{\text{صفر}}{5} = \text{صفر}$$

$$\textbf{العزم الثاني حول المتوسط الحسابي} = \frac{\textbf{محـــ (س} - \overline{س}\textbf{)}^{2}}{\textbf{ن}}$$

$$\text{العزم الثاني للقيم} = \frac{^{2}(6-7) + ^{2}(6-11) + ^{2}(6-4) + ^{2}(6-3) + ^{2}(6-5)}{5}$$

$$= \frac{^{2}(1-) + ^{2}(3-) + ^{2}(2-) + ^{2}(5) + ^{2}(1)}{5} = \frac{1 + 25 + 4 + 9 + 1}{5}$$

$$= \frac{40}{5} = 8$$

التباين = العزم الثاني حول المتوسط الحسابي

التباين = 8

العزم الثالث حول المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجـــ} (\text{س} - \overline{\text{س}})^3}{\text{ن}}$

العزم الثالث للقيم = $\frac{^3(6-7) + ^3(6-11) + ^3(6-4) + ^3(6-3) + ^3(6-5)}{5}$

$= \frac{^3(1-) + ^3(5) + ^3(2-) + ^3(3-) + ^3(1)}{5} = \frac{1- - 27 - 8 + 125 + 1}{5}$

$= \frac{126 + 36 -}{5} = 18$

العزم الرابع حول المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجـــ} (\text{س} - \overline{\text{س}})^4}{\text{ن}}$

العزم الرابع للقيم = $\frac{^4(6-7) + ^4(6-11) + ^4(6-4) + ^4(6-3) + ^4(6-5)}{5}$

$= \frac{^4(1-) + ^4(5) + ^4(2-) + ^4(3-) + ^4(1)}{5} = \frac{1 + 625 + 16 + 81 + 1}{5}$

$= \frac{724}{5} = 144.8$

ثانياً:- العزوم حول المتوسط للقيم المفردة ذات تكرار

ملاحظة هامة: للحصول على العزوم حول المتوسط الحسابي يجب حساب المتوسط الحسابي أولاً.

العزم الأول حول المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجـــ} (\text{س} - \overline{\text{س}}) \text{ ك}}{\text{مجـــ ك}}$

حيث س هي قيمة كل مفردة، و $\overline{س}$ هي المتوسط الحسابي لهذه القيم، ك هي تكرار كل مفردة.

$$\text{العزم الثاني حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ (س} - \overline{س}\text{)}^2 \text{ ك}}{\text{مجـــ ك}} = \text{التباين}$$

$$\text{العزم الثالث حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ (س} - \overline{س}\text{)}^3 \text{ ك}}{\text{مجـــ ك}}$$

$$\text{العزم الرابع حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ (س} - \overline{س}\text{)}^4 \text{ ك}}{\text{مجـــ ك}}$$

مثال (2):-

أوجد العزم الأول والثاني والثالث والرابع حول المتوسط الحسابي للبيانات التالية، ثم احسب التباين:-

القيم	2	4	6	8
التكرار	4	2	3	1

الجواب:-

لإيجاد العزوم حول المتوسط الحسابي يجب أن نحسب المتوسط الحسابي أولاً.

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{محـــ س} \times \text{ك}}{\text{مجـــ ك}} = \frac{1\times8 + 3\times6 + 2\times4 + 4\times2}{10}$$

$$= \frac{8 + 18 + 8 + 8}{10}$$

$$= \frac{42}{10} = 4.2$$

$$\text{العزم الأول حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ ك} \left(\text{س} - \overline{\text{س}} \right)}{\text{مجـــ ك}}$$

$$\text{العزم الأول للقيم} = \frac{1\times (4.2-8) + 3 \times (4.2-6) + 2 \times (4.2-4) + 4 \times (4.2-2)}{10}$$

$$= \frac{1\times (3.8) + 3 \times (1.8) + 2 \times (0.2-) + 4 \times (2.2 -)}{10}$$

$$= \frac{(3.8) + (5.4) + (0.4-) + (8.8 -)}{10} = \frac{\text{صفر}}{10} = \text{صفر}$$

$$\text{العزم الثاني حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ ك} \left(\text{س} - \overline{\text{س}} \right)^2}{\text{مجـــ ك}}$$

$$\text{العزم الثاني للقيم} = \frac{1\times {}^2(4.2 -8) + 3\times {}^2(4.2 -6) + 2\times {}^2(4.2 -4) + 4\times {}^2(4.2-2)}{10}$$

$$= \frac{1\times {}^2(3.8) + 3 \times {}^2(1.8) + 2\times {}^2(0.2-) + 4\times {}^2(2.2-)}{10}$$

$$= \frac{1 \times (14.44) + 3 \times (3.24) + 2\times (0.04) + 4 \times (4.84)}{10}$$

$$= \frac{14.44 + 9.72 + 0.08 + 19.36}{10} = \frac{43.6}{10} = 4.36$$

التباين = العزم الثاني حول المتوسط الحسابي

التباين = 4.36

العزم الثالث حول المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجـــ ك} \left(\text{س} - \overline{\text{س}} \right)^3}{\text{مجـــ ك}}$

العزم الثالث للقيم = $\frac{1\times (4.2-8)^3 + 3\times (4.2-6)^3 + 2\times (4.2-4)^3 + 4\times (4.2-2)^3}{10}$

$= \frac{1\times (3.8)^3 + 3\times (1.8)^3 + 2\times (0.2-)^3 + 4\times (2.2-)^3}{10}$

$= \frac{1\times (54.872) + 3\times (5.832) + 2\times (0.008-) + 4\times (10.648)}{10}$

$= \frac{54.872 + 17.496 + 0.016 - 42.592}{10} = \frac{72.368 + 42.608 -}{10}$

$= \frac{29.760}{10} = 2.976$

العزم الرابع حول المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجـــ ك} \left(\text{س} - \overline{\text{س}} \right)^4}{\text{مجـــ ك}}$

العزم الرابع للقيم = $\frac{1\times (4.2-8)^4 + 3\times (4.2-6)^4 + 2\times (4.2-4)^4 + 4\times (4.2-2)^4}{10}$

$= \frac{1\times (3.8)^4 + 3\times (1.8)^4 + 2\times (0.2-)^4 + 4\times (2.2-)^4}{10}$

$= \frac{1\times (208.5136) + 3\times (10.4976) + 2\times (0.0016) + 4\times (234.256)}{10}$

$= \frac{208.5136 + 31.4928 + 0.0032 + 937.024}{10} = \frac{1177.0336}{10}$

$= 117.70336$

الالتـــــواء:-

الالتواء هو الحيود عن الاعتدال حول المتوسط الحسابي، ويقاس معامل الالتواء بثلاثة مقاييس هي:-

$$\text{المعامل الأول للالتواء} = \frac{\text{المتوسط الحسابي} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$\text{المعامل الثاني للالتواء} = \frac{3\ (\text{المتوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$\text{المعامل الثالث للالتواء} = \frac{\text{العزم الثالث حول المتوسط الحسابي}}{(\text{الانحراف المعياري})^3}$$

والمنحنيات التكرارية بعضها متماثل وبعضها غير متماثل أو ملتو.

فإذا كان:-

1. معامل الالتواء = صفر← التوزيع متماثل.
2. معامل الالتواء > صفر ← التوزيع ملتوي جهة القيم الكبرى، ويكون جهة اليمين موجب الالتواء.
3. معامل الالتواء < صفر← التوزيع ملتوي جهة القيم الصغرى، ويكون جهة اليسار سالب الالتواء.

مثال (أ):-

من المثال السابق رقم (1) أوجد معامل الالتواء الثالث.

الحل:-

$$\text{المعامل الثالث للالتواء} = \frac{\text{العزم الثالث حول المتوسط الحسابي}}{(\text{الانحراف المعياري})^3}$$

وفي المثال رقم (1) وجدنا أن العزم الثالث حول المتوسط الحسابي يساوي 18، والتباين = 8، ومن التباين نحصل على الانحراف المعياري، وهو $= \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\text{المعامل الثالث للالتواء} = \frac{18}{\sqrt[3]{8}} = \frac{18}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}} = \frac{18}{\sqrt[3]{2 \times 8}}$$

$$= \frac{18}{22.62} = 0.795 \approx 0.8 \text{ أي الالتواء موجب.}$$

مثال (ب):-

من المثال السابق رقم (2) احسب معامل الالتواء الثالث.

الحل:-

$$\text{المعامل الثالث للالتواء} = \frac{\text{العزم الثالث حول المتوسط الحسابي}}{(\text{الانحراف المعياري})^3}$$

وفي المثال السابق رقم (2) وجدنا أن العزم الثالث حول المتوسط الحسابي يساوي 2.976، والتباين = 4.36، ونستطيع أن نحسب

الانحراف المعياري، وهو $= \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{4.36} = 2.088$

$$\text{معامل الالتواء الثالث} = \frac{2.976}{\sqrt[3]{2.088}} = 0.33$$

أي أن الالتواء موجب لأن معامله > 0

التفرطح:-

هو مدى تقارب أو تباعد المنحنى عن المنوال، وتقاس درجة التفرطح على النحو التالي:-

1- المعامل العزمي للتفرطح $= \frac{\text{العزم الرابع حول المتوسط الحسابي}}{(\text{الانحراف المعياري})^4}$

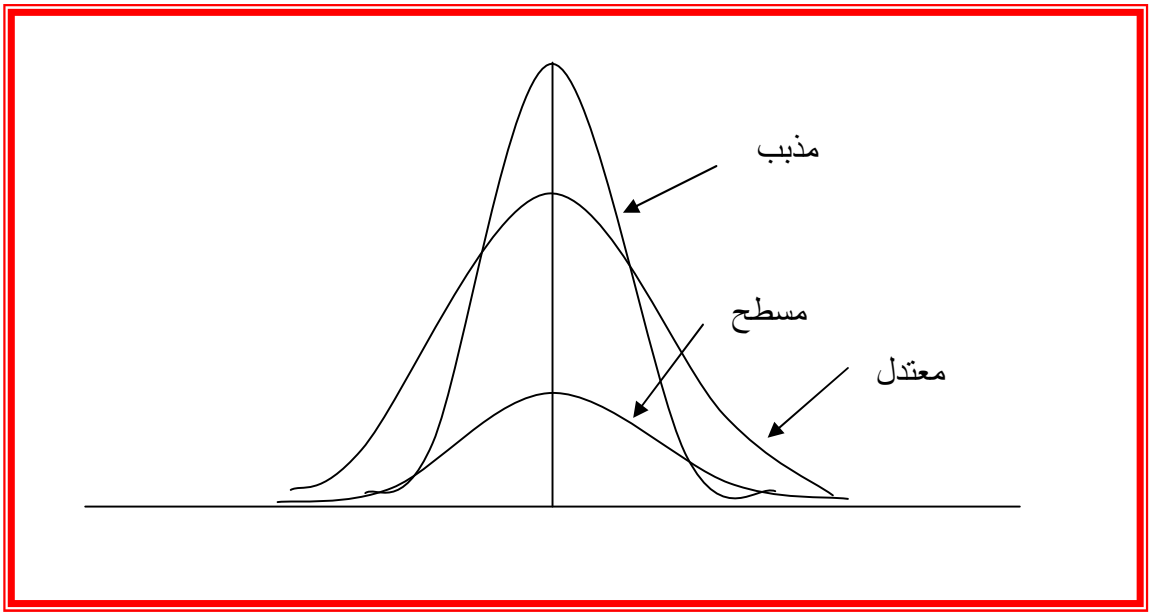
2- معامل التفرطـــــــح $= \frac{\text{الربيع الأعلى – الربيع الأدنى}}{2\ (\text{المئين التسعين – المئين العاشر})}$

فإذا كان:-

معامل التفرطح = 0.263 يكون المنحنى اعتدالي التذبب والتوزيع متماثل.

معامل التفرطح > 0.263 يكون المنحنى منبسط التفرطح (مسطح).

معامل التفرطح < 0.263 يكون المنحنى مدبب (قليل التفرطح).



إذا كان:-

المعامل العزمي التفرطح = 3 يكون المنحنى معتدل.

المعامل العزمي التفرطح > 3 يكون المنحنى التكراري مسطح.

المعامل العزمي التفرطح < 3 يكون المنحنى التكراري مذبب.

مثال (جـــ):-

أوجد المعامل العزمي للتفرطح في المثال رقم (1) في موضوع العزوم حول المتوسط الحسابي.

$$\text{المعامل العزمي للتفرطح} = \frac{\text{العزم الرابع حول المتوسط الحسابي}}{(\text{الانحراف المعياري})^4} \quad \ldots\ldots (1)$$

وكان العزم الرابع حول المتوسط الحسابي في المثال رقم (1) في موضوع العزوم يساوي

$$= 144.8 \quad \ldots\ldots (2)$$

والتباين في نفس المثال (1) $= 8 =$ الانحراف المعياري $= \sqrt{\text{التباين}}$

أي أن الانحراف المعياري $= \sqrt{8}$ ..... (3)

من (2) ، (3) نعوض في المعادلة رقم (1) يكون

$$\text{معامل التفرطح العزمي} = \frac{144.8}{(\sqrt{8})^4} = \frac{144.8}{64} = 2.26$$

أي أن المعامل العزمي للتفرطح < 3 يكون منحنى التكراري مدبب.

مثال (د):-

أوجد المعامل العزمي للتفرطح من المثال رقم (2) في موضوع العزوم حول المتوسط الحسابي.

الحل:-

$$\text{المعامل العزمي للتفرطح} = \frac{\text{العزم الرابع حول المتوسط الحسابي}}{(\text{الانحراف المعياري})^4} \quad \ldots\ldots (1)$$

ولكن العزم الرابع حول المتوسط الحسابي في المثال رقم (2) في موضوع العزوم يساوي

$$= 117.70336 \quad \ldots\ldots (2)$$

والتباين $= 4.36$ ، الانحراف المعياري $= \sqrt{4.36}$ ..... (3)

من (2) ، (3) نعوض في (1) يكون

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{117.70336}{(\sqrt{4.36})^4} = \frac{117.70336}{(4.36)^2}$$

$$= \frac{117.70336}{19.0096} = 6.1918 \approx 6$$

أي أن المعامل العزمي للتفرطح 6 > 3 يكون منحنى التكراري (مسطح).

الأرقام القياسية

الرقم القياسي:-

هو رقم نسبي يقيس التغير بين قيمتين من قيم الظاهرة.

الرقم القياسي النسبي البسيط:-

هو معدل التغير المئوي في قيمة ما بالنسبة لقيمة أخرى مأخوذة كأساس، ويمكن الحصول على الرقم النسبي بقسمة القيمة الأولى على القيمة الثانية المأخوذة كأساس، وذلك لقياس التغير. ويمكن التعبير عنه بالقانون الآتي عند تطبيقه على سعر سلعة ما.

$$\text{الرقم القياسي النسبي البسيط لسعر السلعة} = \frac{\text{سعر السلعة في سنة المقارنة}}{\text{سعر السلعة في سنة الأساس}} \times 100$$

ويمكن التعبير عن هذا القانون بالرموز كما يلي:-

$$\text{الرقم القياسي النسبي البسيط لسعر السلعة} = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

فمثلاً إذا كان سعر إحدى السلع في سنة 1990 كان 60 ديناراً، وأن سعرها في 1995 كان 70 ديناراً، فيمكننا تطبيق القانون على هذه السلعة باعتبار أن ســـ1990ـــنة سنة الأساس، وســـ1995ـــنة هي سنة المقارنة، وذلك كما يلي:-

$$\text{السعر النسبي البسيط للسلعة أو الرقم القياسي البسيط لسعر السلعة} = \frac{70}{60} \times 100$$

$$= 116.6\%$$

أي أن سعر هذه السلعة ازداد ســـ1995ـــنة عن ســـ1990ـــنة بمقدار 16.6%.

إذا كان السعر لسلعة أخرى يساوي 80 في ســـ1992ـــنة ثم أصبح سعرها في ســـ1998ـــنة = 60، فإن الرقم القياسي البسيط يكون = $\frac{60}{80} \times 100 = 75\%$ (نقصت عن 100 بمقدار 25) أي أن سعر السلعة قد نقص بمقدار 25 % أي أننا نحسب مقدار الزيادة أو النقص في التغير بالنسبة للعدد 100، فإذا زاد عن المائة يكون بمقدار هذه الزيادة المحسوبة، وإذا نقص الناتج عن المائة يكون بمقدار هذا النقص المحسوب في الناتج.

كذلك يمكن حساب الرقم القياسي البسيط لكمية الإنتاج كما يلي:-

أي أن الرقم القياسي البسيط للسلعة في سنة معينة ولتكن 1995 بالنسبة لسنة الأساس 1990 يكون كما يلي:-

$$\text{الرقم القياسي البسيط لكمية الإنتاج} = \frac{\text{كمية الإنتاج في سنة المقارنة}}{\text{كمية الإنتاج في سنة الأساس}} \times 100$$

ويمكن التعبير عنه بالقانون الآتي:-

$$\text{الرقم القياسي البسيط لكميات الإنتاج} = \frac{Q_1}{Q_0} \times 100$$

فمثلاً هناك مصنع كان إنتاجه من الحلوى = 200 طن في ســـ1992ـــنة (كمية أساس) وإنتاجه في ســـ1998ـــنة = 800 طن يكون بذلك:

$$\text{الرقم القياسي البسيط لكميات الإنتاج} = \frac{Q_1}{Q_0} \times 100$$

$$= \frac{800}{200} \times 100 = 400\ \%$$

أي أنه زاد الإنتاج بمقدار 300 % عما عليه في ســـ1992ـــنة.

الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار مجموعة من السلع في سنة المقارنة إلى أسعارها في ســـــنة الأســـاس = $\frac{\text{مجـــ } P_1}{\text{مجـــ } P_0} \times 100$

حيث P_1 السعر في سنة المقارنة، P_0 هو السعر في سنة الأساس.

مثال:-

أوجد الرقم القياسي التجميعي البسيط من الجدول التالي الذي يبين بعض السلع وأسعارها في 1990، وأسعارها 1995.

السلعة	السعر في 1990 P_0	السعر في 1995 P_1
الجـــبنة	2	2.5
زبدة	3	3.4
زيتون	3.5	4.0
المجموع	8.5	9.9

الجواب:-

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار} = \frac{\text{مجـــ } P_1}{\text{مجـــ } P_0} \times 100$$

$$= \frac{9.9}{8.5} \times 100 = 116.4\%$$

ويمكن حساب مناسيب السعر لكل سلعة على حدة كما يلي:-

$$\text{الرقم القياسي البسيط للجبـــــنة} = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

$$= \frac{2.5}{2} \times 100 = 125\%$$

$$\text{الرقم القياسي البسيط للزبـــــدة} = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

$$= \frac{3.4}{3} \times 100 = 113.3\%$$

$$\text{الرقم القياسي البسيط للزيتون} = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

$$= \frac{4}{3.5} \times 100 = \%114.3$$

$$\text{الوسط الحسابي للأرقام القياسية البسيطة} = \frac{114.3 + 113.3 + 125}{3}$$

$$= \frac{352.6}{3} = \%117.5$$

وإذا استخدمنا الكميات في سنة الأساس لكل سلعة من السلع الداخلة في حساب الرقم القياسي كأوزان لترجيح أسعارها، فإننا نسمي هذا الرقم (برقم لاسبير) ويمكن حسابه بالقانون التالي:-

$$\text{رقم لاسبـــير} = \frac{\text{مجـــ } P_1 q_0}{\text{مجـــ } P_0 q_0} \times 100$$

وإذا استخدمنا الكميات في سنة المقارنة لكل سلعة من السلع الداخلة في حساب الرقم القياسي كأوزان لترجيح أسعارها، فإننا نسمي هذا الرقم (برقم باش) ويمكن حسابه بالقانون التالي:-

$$\text{رقم بـــاش} = \frac{\text{مجـــ } P_1 q_1}{\text{مجـــ } P_0 q_1} \times 100$$

وقد ظهر رقم آخر وهو الرقم القياسي لمارشال ايدكورت، ويمكن حسابه بالقانون الآتي:-

$$\text{رقم مارشال ايدكورت} = \frac{\text{مجـــ } (q_1 + q_0) P_1}{\text{مجـــ } (q_1 + q_0) P_0} \times 100$$

حيث P_1 ، q_1 تعني أسعار وكميات سنة المقارنة، P_0 ، q_0 تعني أسعار وكميات سنة الأساس بالترتيب.

وبعد ذلك ظهر رقم آخر عبارة عن المتوسط الهندسي لرقمي لاسبير وباش، يسمى (رقم فيشر)، ويمكن حسابه باستخدام القانون الآتي:-

$$\text{رقم فيشر} = \sqrt{\frac{\text{مجـــ } P_1 q_0}{\text{مجـــ } P_0 q_0} \times \frac{\text{مجـــ } P_1 q_1}{\text{مجـــ } P_0 q_1}}$$

أمثلة تطبيقية:-

مثال (1):-

من الجدول الآتي أحسب رقمي لاسبير وباش.

نوع السلعة	الأسعار بالدينار		الكميات بالكيلوجرام	
	1995	2000	1995	2000
الجـــبن	1.5	2.0	20	25
الزبـــدة	2.4	3.0	10	20
الزيتون	1.0	1.5	15	30

الجواب:-

$$\text{مقياس رقم لاسبير} = 100 \times \frac{\text{مجـــ } P_1 q_0}{\text{مجـــ } P_0 q_0}$$

$$100 \times \frac{15 \times 1.5 + 10 \times 3 + 20 \times 2}{15 \times 1.0 + 10 \times 2.4 + 20 \times 1.5} =$$

$$\text{رقم لاسبير المطلوب} = 100 \times \frac{22.5 + 30 + 40}{15 + 24 + 30}$$

$$= 100 \times \frac{92.5}{69} = \%134.058$$

$$\text{مقياس رقم باش} = 100 \times \frac{\text{مجـــ } p_1 q_1}{\text{مجـــ } p_0 q_1}$$

$$100 \times \frac{30 \times 1.5 + 20 \times 3 + 25 \times 2}{30 \times 1 + 20 \times 2.4 + 25 \times 1.5} =$$

$$100 \times \frac{45 + 60 + 50}{30 + 48 + 37.5} =$$

$$= 100 \times \frac{155}{115.5} = \%134.199$$

مثال (2):-

من المثال السابق أوجد رقم مارشال ايدكورت.

الحل:-

$$\text{رقم مارشال ايدكورت} = 100 \times \frac{\text{مجـ}\ (q_1 + q_0)\ P_1}{\text{مجـ}\ (q_1 + q_0)\ P_0}$$

$$\text{رقم ايدكورت المطلوب} = 100 \times \frac{(30+15)\ 1.5 + (20+10)\ 3 + (25+20)\ 2}{(30+15)\ 1.0 + (20+10)\ 2.4 + (25+20)\ 1.5}$$

$$100 \times \frac{45 \times 1.5 + 30 \times 3 + 45 \times 2}{45 \times 1.0 + 30 \times 2.4 + 45 \times 1.5} =$$

$$100 \times \frac{67.5 + 90 + 90}{45 + 72 + 67.5} =$$

$$100 \times \frac{247.5}{184.5} = \%134.15$$

مثال (3):-

من مثال رقم (1) أوجد رقم فيشر.

$$\text{رقم فيشر} = 100 \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ P_1 q_1}{\text{مجـ}\ P_0 q_1} \times \frac{\text{مجـ}\ P_1 q_0}{\text{مجـ}\ P_0 q_0}}$$

$$\text{رقم فيشر} = 100 \sqrt{\frac{30\times1.5+20\times3+25\times2}{30\times1+20\times2.4+25\times1.5} \times \frac{15\times1.5+10\times3+20\times2}{15\times1+10\times2.4+20\times1.5}}$$

$$100 \sqrt{\frac{155}{115.5} \times \frac{92.5}{69}} =$$

$$100 \times 1.341 = \sqrt{1.342 \times 1.341}\,100 =$$

$$= 134.1\%$$

مثال (4):-

البيانات التالية تبين أسعار وكميات بعض السلع لسنة 2002 كسنة مقارنة، وسنة 1998 كسنة أساس، والمطلوب حساب رقمي لاسبير وباش لهذه البيانات.

نوع السلعة	الأسعار بالدينار		الكميات بالكيلوجرام	
	1998	2002	1998	2002
أرز	1	1.5	20	25
دقيق	1.5	2	15	20
زيت	0.75	1	10	15

الجواب:-

$$\text{رقم لاسبير} = \frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{10 \times 1 + 15 \times 2 + 20 \times 1.5}{10 \times 0.75 + 15 \times 1.5 + 20 \times 1} \times 100$$

$$= \frac{10 + 30 + 30}{7.5 + 22.5 + 20} \times 100$$

$$= \frac{70}{50} \times 100 = 140\%$$

$$\text{مقياس رقم باش} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{15 \times 1 + 20 \times 2 + 25 \times 1.5}{15 \times 0.75 + 20 \times 1.5 + 25 \times 1} \times 100$$

$$100 \times \frac{15 + 40 + 37.5}{11.25 + 30 + 25} =$$

$$\%139.62 = 100 \times \frac{92.5}{66.25} =$$

مثال (5):-

من المثال السابق أوجد رقمي إيدكورت وفيشر.

الحل:-

$$\text{رقم مارشال ايدكورت} = 100 \times \frac{\text{مجـ} \; (q_1 + q_0) \; P_1}{\text{مجـ} \; (q_1 + q_0) \; P_0}$$

$$\text{رقم ايدكورت المطلوب} = 100 \times \frac{(15+10)\,1 + (20+15)\,2 + (25+20)\,1.5}{(15+10)\,0.75 + (20+15)\,1.5 + (25+20)\,1}$$

$$100 \times \frac{25 \times 1 + 35 \times 2 + 45 \times 1.5}{25 \times 0.75 + 35 \times 1.5 + 45 \times 1} =$$

$$100 \times \frac{25 + 70 + 67.5}{18.75 + 52.5 + 45} =$$

$$\%139.78 = 100 \times \frac{162.5}{116.25} =$$

$$\text{رقم فيشر} = 100 \sqrt{\frac{\text{مجـ} \; P_1 \; q_0}{\text{مجـ} \; P_0 \; q_0} \times \frac{\text{مجـ} \; P_1 \; q_1}{\text{مجـ} \; P_0 \; q_1}}$$

$$100 \sqrt{\frac{70}{50} \times \frac{92.5}{66.25}} =$$

$$100 \sqrt{1.4 \times 1.396} =$$

$$\% \; 139.8 =$$

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى
الجامعة المفتوحة - قسم الاقتصاد
امتحان مادة مبادئ الإحصاء (د. الطبولي)

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:-

س1: أ- أشرح الفروق بين كشف البحث واستمارة الاستبيان.

ب- اكتب العلاقة بين التباين والانحراف المعياري.

س2: أوجد الانحراف المتوسط للبيانات التالية:-

القيم	9	10	14	17	15	19
تكرارها	1	2	3	2	1	3

س3: أوجد الوسيط للبيانات التالية:-

الفترات	- 45	- 50	- 55	- 60	- 65	- 70
التكرارات	2	3	4	6	2	3

س4: كون جدول التوزيع التكراري للبيانات التالية التي تمثل أطول مجموعة من الأطفال، ثم ارسم المدرج التكراري لهذا التوزيع التكراري.

130	120	135	124	137	132
135	144	125	147	122	138
142	136	124	140	135	127
137	126	132	137	125	137
130	132	127	135	150	125

5: أوجد المنوال بطريقتين مختلفتين للبيانات التالية:-

الفترات	- 50	- 60	- 70	- 80	- 90
التكرارات	8	3	10	5	4

انتهت الأسئلة

((الإجابة))

س1: أ- أشرح الفروق بين كشف البحث واستمارة الاستبيان.

الجواب:-

كشف البحث	استمارة الاستبيان
1- يقوم بملئه وجمع البيانات الباحث نفسه.	1- يقوم بملئه المبحوث.
2- يستعمل في الأماكن التي تنتشر بها الأمية.	2- يتم إرسالها للمبحوث عن طريق الباحث أو عن طريق البريد.
3- يخضع لخطأ التحيز من قبل الباحث.	3- يتم وضع شروح عن الأسئلة وكيفية ملئ الاستمارة للمبحوث.

س1: ب- اكتب العلاقة بين التباين والانحراف المعياري.

الجواب:-

العلاقة بين التباين والانحراف المعياري أن التباين = مربع الانحراف المعياري

$$\text{فإذا كان التباين} = \frac{\text{مجـ س}^2 \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ س} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^2$$

$$\text{فإن الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^2 \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ س} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^2}$$

حيث س هي مركز كل فترة ، ك هو تكرار المقابل لمركز الفترة، في حالة البيانات المبوبة ذات فترات.

****

س2: أوجد الانحراف المتوسط للبيانات التالية:-

القيم	9	10	14	17	15	19
تكرارها	1	2	3	2	1	3

الجواب:-

أولاً نوجد المتوسط الحسابي للبيانات، وهو $\overline{س}$

$$\overline{س} = \frac{\text{مجـــ س} \times \text{ك}}{\text{مجـــ س}}$$

$$\overline{س} = \frac{3 \times 19 + 1 \times 15 + 2 \times 17 + 3 \times 14 + 2 \times 10 + 1 \times 9}{3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1}$$

$$\overline{س} = \frac{57 + 15 + 34 + 42 + 20 + 9}{12} = \frac{177}{12}$$

$$= 14.75$$

الانحراف المتوسط في هذه الحالة = $\frac{\text{مجـــ } |س - \overline{س}| \text{ ك}}{\text{مجـــ ك}}$

الانحراف المتوسط المطلوب هو

$$= \frac{3\times[14.75-19] +1\times [14.75-15] +2\times [14.75-17] +3\times [14.75 -14] +2\times [14.75 -10] +1\times [14.75 -9]}{12}$$

$$= \frac{3 \times 4.25 + 1 \times 0.25 + 2 \times 2.25 + 3 \times 0.75 + 2 \times 4.75 + 1 \times 5.75}{12}$$

$$= \frac{12.75 + 0.25 + 4.5 + 2.25 + 9.5 + 5.75}{12}$$

$$= \frac{35 .0}{12} = 2.916$$

****

س3: أوجد الوسيط للبيانات التالية:-

الفترات	45 -	50 -	55 -	60 -	65 -	70 -
التكرارات	2	3	4	6	2	3

الجواب:-

أولاً: نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد التالي:-

الفترات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد	
45 -	2	الأقل من 50	2
50 -	3	الأقل من 55	5
55 -	4	الأقل من 60	9
60 -	6	الأقل من 65	15
65 -	2	الأقل من 70	17
75 - 70	3	الأقل من 75	20

نوجد رتبة الوسيط وهي = $\frac{\text{مجـ ك}}{2} = \frac{20}{2} = 10$

نبحث عن موقع رتبة الوسيط في الجدول المتجمع الصاعد.

ثم نعوض من الجدول في قانون الوسيط، وهو:-

$$\text{الوسيط} = \text{بداية الفترة الوسطية} + \frac{\frac{\text{مجـ ك}}{2} - \text{التكرار السابق من المتجمع الصاعد}}{\text{التكرار المقابل (الأصلي)}} \times \text{ل}$$

حيث ل هي طول الفترة = 5

من الجدول نجد أن:

$$\text{الوسيط} = 60 + \frac{9 - 10}{6} \times 5$$

$$= 60 + \frac{5}{6} = 60.83$$

****

س4: كون جدول التوزيع التكراري للبيانات التالية التي تمثل أطوال مجموعة من الأطفال، ثم ارسم المدرج التكراري لهذا التوزيع التكراري.

130	120	135	124	137	132
135	144	125	147	122	138
142	136	124	140	135	127
137	126	132	137	125	137
130	132	127	135	150	125

الجواب:-

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

من البيانات نجد أن أكبر قيمة = 150

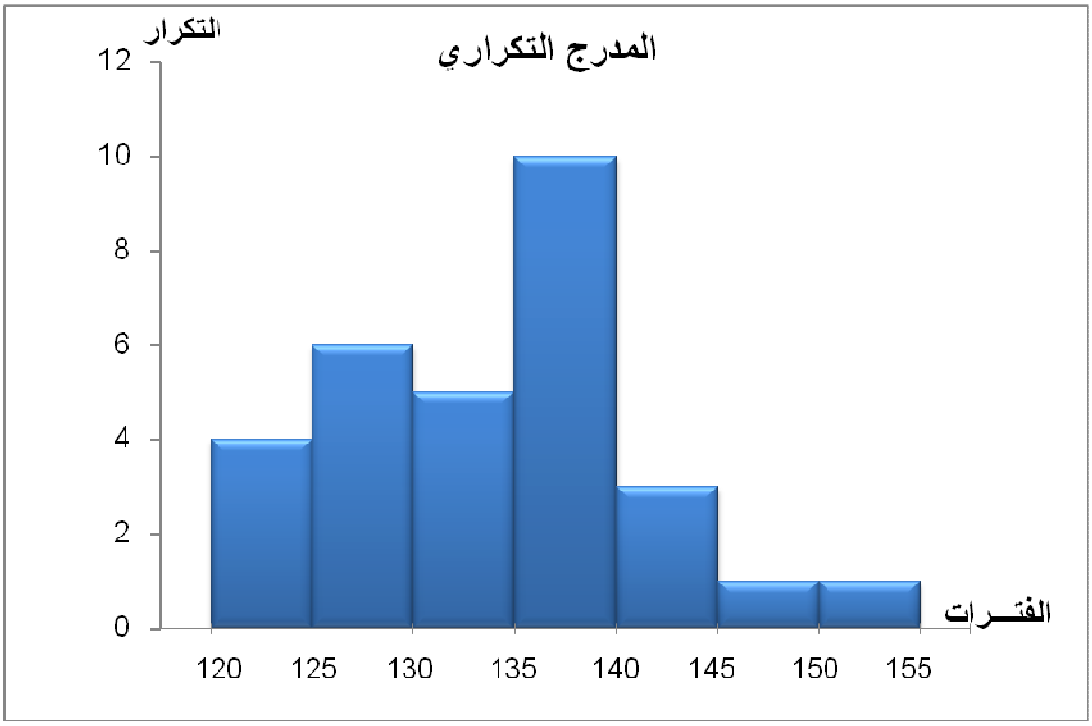
وأصغر قيمة = 120

المدى = 150 – 120 = 30

باعتبار المدى صغير نفرض أن طول الفترة = 5

عدد الفترات = $\frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{30}{5} = 6$

الفترات	علامات الحصر	التكرار
120 –	||||	4
125 –	𝍸 |	6
130 –	𝍸 |	5
135 –	𝍸 𝍸	10
140 –	|||	3
145 –	|	1
155 – 150	|	1
المجـــــــموع		30



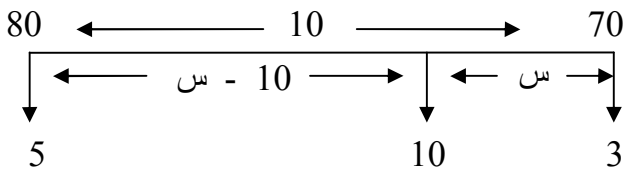
****

5: أوجد المنوال بطريقتين مختلفتين للبيانات التالية:-

الفترات	50 -	60 -	70 -	80 -	90 -
التكرارات	8	3	10	5	4

الجواب:-

أولاً: باستخدام طريقة الرافعة:



$3 \times س = 5 (10 - س)$

$3 س = 50 - 5 س$

$3 س + 5 س = 50$

$8 س = 50 \Leftarrow س = \frac{50}{8} = 6.25$

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

$= 70 + 6.25 = 76.25$ (حيث أن بداية الفترة المنوالية هي 70).

ثانياً:- باستخدام طريقة الفروق (بيرسون)

الفـــرق	التـــكرار	الفـــترات
7	3	70 – 60
ـــ	10	80 – 70
5	5	90 – 80

الفترة المنوالية

$$\frac{7}{5} = \frac{س}{10 - س}$$

$5 س = 70 - 7 س$

$12 س = 70$

$س = \frac{70}{12} = 5.83$

بالتعويض في القانون الآتي:-

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

المنوال = $70 + 5.83 = 75.83 \approx 76$

****

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى
الجامعة المفتوحة - قسم الاقتصاد
امتحان مادة مبادئ الإحصاء (د. الطبولي)

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:-

س1: أ- وضح أهم الاعتبارات الواجب مراعاتها عند تصميم الاستمارة الإحصائية.

ب- عرف علم الإحصاء.

س2: أوجد الانحراف الربيعي للبيانات الآتية:-

الفترات	5 -	10 -	15 -	20 -	25 -	30 -
التكرارات	10	8	12	18	5	7

س3: البيانات التالية تمثل أرقام لدرجات الحرارة في مجموعة من البلدان:-

24	28	22	16	15	42	27	30
34	30	40	25	10	35	37	35
25	22	25	15	12	45	38	
25	24	40	24	28	26	18	

المطلوب: أ - كون جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات.

ب- ارسم المنحني التكراري لهذا التوزيع.

س4: أ - أوجد العزم الأول والعزم الثاني للبيانات التالية.

القيم	2	4	6	8
التكرارات	6	9	4	1

ب- أوجد العزم الثالث لنفس البيانات في (أ) حول المتوسط الحسابي.

5: أ - أكتب العلاقة بين الانحراف المعياري والتباين والعلاقة بين التباين والعزم الثاني حول المتوسط الحسابي.

ب- إذا فرض إن الانحراف المعياري لدرجات الحرارة في بلد ما هو 5 درجات والمتوسط لها هو 15، بينما كان الانحراف المعياري لدرجات الحرارة في بلد آخر هو 8 والمتوسط الحسابي لها هو 40 فما هو معامل الاختلاف بين درجات البلدين.

انتهت الأسئلة

((الإجابة))

س1: أ- وضح أهم الاعتبارات الواجب مراعاتها عند تصميم الاستمارة الإحصائية.

الجواب:-

أهم الاعتبارات الواجب مراعاتها عند تصميم الاستمارة الإحصائية هي:-

1- تحديد الهدف الذي يرمي إليه البحث المستخدم فيه الاستمارة، وذلك حتى لا يضيع جهد الباحث، ويوفر الوقت بالنسبة له وكذلك يمكن الباحث من تحديد البيانات اللازمة للوصول إلى هدف البحث، كما يجب التعرف على المتغيرات المختلفة التي لها علاقة بالظاهرة المراد دراستها.

2- تحديد المجتمع المراد دراسته، فمثلاً إذا أردنا دراسة حوادث السيارات في مدينة ما فإن المجتمع الإحصائي للدراسة هو مجموع السيارات والسائقين في هذه المدينة، كما يجب أن يلاحظ أن المقصود بالمجتمع في الإحصاء هو مجموع المفردات التي يجب أن يجمع عنها البيانات.

3- تحديد المصادر التي تستقي منها البيانات، فعندما يجمع الباحث البيانات يكون قد حدد بالفعل المصادر التي يجمع منها هذه البيانات اللازمة عن المجتمع الإحصائي، وهي مصادر تاريخية ومصادر ميدانية، نستخدم حسب المطلوب من البحث.

س1: ب- عرف علم الإحصاء؟

الجواب:-

علم الإحصاء هو العلم الذي يقوم بالبحث في أساليب جمع وتبويب البيانات ووسائل التحليل لهذه البيانات للوصول إلى معرفة الظاهرة المراد دراستها.

****

س2: أوجد الانحراف الربيعي للبيانات الآتية:-

الفترات	5 -	10 -	15 -	20 -	25 -	30 -
التكرارات	10	8	12	18	5	7

الجواب:

$$\text{الانحراف الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2} \quad (1)$$

الربيع الأعلى = بداية فترة الربيع الأعلى + $\frac{\frac{3}{4}\text{محـ ك} - \text{التكرار السابق من المتجمع الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}} \times$ ل (2)

الربيع الأدنى = بداية فترة الربيع الأدنى + $\frac{\frac{\text{محـ ك}}{4} - \text{التكرار السابق من المتجمع الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}} \times$ ل (3)

حيث ل هي طول الفترة.

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد ثم نعوض منه في القوانين السابقة:-

الفترات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد
5 -	10	الأقل من 5 = 0
10 -	8	الأقل من 10 = 10
15 -	12	الأقل من 15 = 18
20 -	18	الأقل من 20 = 30
25 -	5	الأقل من 25 = 48
35 - 30	7	الأقل من 30 = 53
		الأقل من 35 = 60
المجموع	60	

رتبة الربيع الأعلى = $\frac{3}{4}$ محـ ك

$$ر_3 = 60 \times \frac{3}{4} = 45$$

رتبة الربيع الأدنى = $\frac{\text{محـ ك}}{4}$ $\qquad ر_1 = \frac{60}{4} = 15$

بالتعويض في القوانين السابقة ينتج الآتي:-

الربيع الأعلى = $20 + \frac{30 - 45}{18} \times 5$

$$= 20 + \frac{75}{18} = 4.16 + 20 = 24.16 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{الربيع الأدنى} = 10 + \frac{10 - 15}{8} \times 5$$

$$= 10 + \frac{25}{8} = 3.125 + 10 = 13.125 \quad \ldots\ldots (2)$$

من (3)، (2) نعوض في قانون الانحراف الربيعي الأول ... (1)

$$\text{الانحراف الربيعي} = \frac{24.16 - 13.125}{2} = \frac{11.035}{2} = 5.52$$

****

س3: البيانات التالية تمثل أرقام لدرجات الحرارة في مجموعة من البلاد:-

24	28	22	16	15	42	27	30
34	30	40	25	10	35	37	35
25	22	25	15	12	45	38	
25	24	40	24	28	26	18	

المطلوب: أ - كون جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات.

ب- ارسم المنحني التكراري لهذا التوزيع.

الجواب:-

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

المدى = 45 – 10 = 35

بفرض أن طول الفترة = 5

$$\text{عدد الفترات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{35}{5} = 7$$

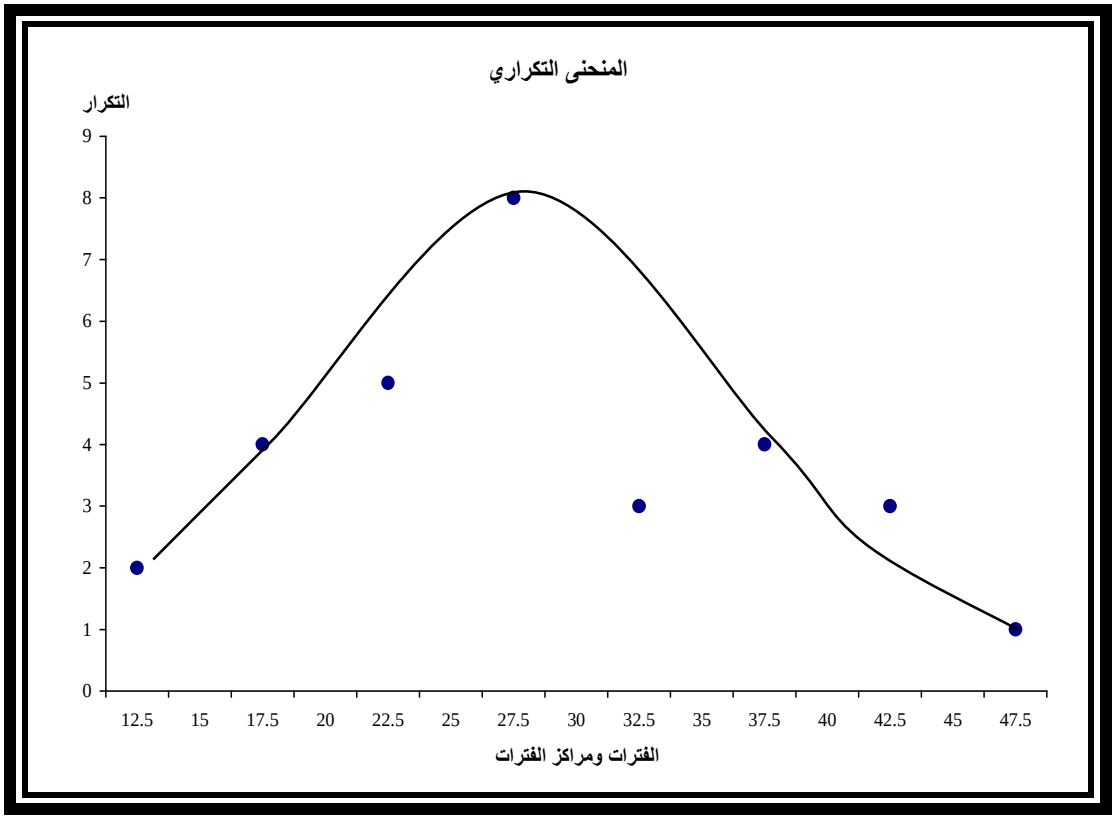
ولرسم المنحنى التكراري يجب الحصول على مراكز الفترات أولاً، ثم نرسم العلاقة بين مراكز الفترات والتكرارات المقابلة لها.

$$\text{مركز الفترة} = \frac{\text{بداية الفترة + نهاية الفترة}}{2}$$

أو مركز الفترة = بداية الفترة + $\frac{1}{2}$ طول الفترة.

والجدول التكراري المطلوب هو:-

الفترات	علامات الحصر	التكرارات	مراكز الفترات
15 – 10	‖	2	12.5
– 15	‖‖	4	17.5
– 20	‖‖‖	5	22.5
– 25	‖‖‖ ‖‖‖	8	27.5
– 30	‖‖	3	32.5
– 35	‖‖‖‖	4	37.5
– 40	‖‖	3	42.5
50 – 45	‖	1	47.5
المجـــــــموع		30	



****

س4: أ – أوجد العزم الأول والعزم الثاني للبيانات التالية.

القيم	2	4	6	8
التكرارات	6	9	4	1

الجواب:-

$$\text{العزم الأول} = \frac{\text{محـــ س} \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}} \quad \frac{(1 \times 8) + (4 \times 6) + (9 \times 4) + (6 \times 2)}{1 + 4 + 9 + 6}$$

$$= \frac{8 + 24 + 36 + 12}{20} = \frac{80}{20} = 4$$

$$\text{العزم الثاني} = \frac{\text{محـــ} (\text{س}^2 \times \text{ك})}{\text{محـــ ك}}$$

$$= \frac{1 \times {}^2(8) + 4 \times {}^2(6) + 9 \times {}^2(4) + 6 \times {}^2(2)}{20}$$

$$= \frac{1\times 64 + 4 \times 36 + 9 \times 16 + 6 \times 4}{20} = \frac{64 + 144 + 144 + 24}{20} = \frac{376}{20}$$

$$= 18.8$$

س4: ب– أوجد العزم الثالث لنفس البيانات في (أ) حول المتوسط الحسابي.

$$\text{العزم الثالث حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{محـــ} [(\text{س} - \bar{\text{س}})^3 \times \text{ك}]}{\text{محـــ ك}}$$

ولإيجاد العزم الثالث حول المتوسط الحسابي نحسب أولاً المتوسط الحسابي، ولكنه محسوب من الفقرة السابقة (أ) لأن المتوسط الحسابي يساوي العزم الأول = 4

$$\text{العزم الثالث حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{محـــ } [(\text{س}_{\text{ر}} - 4)^3 \times \text{ك}]}{20}$$

$$= \frac{1 \times {}^3(4 - 8) + 4 \times {}^3(4 - 6) + 9 \times {}^3(4 - 4) + 6 \times {}^3(4 - 2)}{20}$$

$$= \frac{1 \times {}^3(4) + 4 \times {}^3(2) + 9 \times {}^3(0) + 6 \times {}^3(2-)}{20}$$

$$= \frac{64 + 4 \times 8 + \text{صفر} + 6 \times 8 -}{20}$$

$$= \frac{64 + 32 + 48 -}{20} = \frac{48}{20} = 2.4$$

****

5: أ – أكتب العلاقة بين الانحراف المعياري والتباين والعلاقة بين التباين والعزم الثاني حول المتوسط الحسابي.

الجواب:-

$$\text{التـــباين} = \frac{\text{محـــ س}^2 \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}} - \left(\frac{\text{محـــ س} \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}}\right)^2$$

$$\text{فإن الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\text{محـــ س}^2 \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}} - \left(\frac{\text{محـــ س} \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}}\right)^2}$$

أي أن التباين = مربع الانحراف المعياري.

$$\text{والعزم الثاني حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{محـــ } (\text{س} - \overline{\text{س}})^2 \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}}$$

$$= \frac{\text{مجـــ س}^2 \times \text{ك}}{\text{مجـــ ك}} - \left(\frac{\text{مجـــ س} \times \text{ك}}{\text{مجـــ ك}} \right)^2$$

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي = التباين.

س5: ب- إذا فرض إن الانحراف المعياري لدرجات الحرارة في بلد ما هو 5 درجات والمتوسط لها هو 15، بينما كان الانحراف المعياري لدرجات الحرارة في بلد آخر هو 8 والمتوسط الحسابي لها هو 40 فما هو معامل الاختلاف بين درجات البلدين.

الجواب:-

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times 100$$

$$\text{معامل الاختلاف لحرارة البلد الأول} = \frac{5}{15} \times 100 = 33.33\ \%$$

$$\text{معامل الاختلاف لدرجات حرارة البلد الثاني} = \frac{8}{40} \times 100 = 20\ \%$$

نلاحظ أن درجات حرارة البلد الأول أكثر تشتتاً من درجات حرارة البلد الثاني.

****

الجماهيرية **العربية** الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى
الجامعة المفتوحة - قسم الاقتصاد
امتحان مادة مبادئ الإحصاء (د. الطبولي)

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:-

س1: البيانات التالية توضح الساعات التي يعملها مجموعة من المنتجين في الأسبوع في إحدى المؤسسات، والمطلوب إيجاد.

أ- المنوال بطريقة الرافعة.

ب- المنوال بطريقة الفروق (بيرسون).

فترات الساعات	32 -	36 -	40 -	44 -	48 -	52 -
عدد المنتجين	4	6	5	10	8	7

س2: أ- تكلم باختصار عن أنواع العينات ومزايا كل منها.

ب- عرف الوسيط واكتب خواصه.

س3: أوجد كلا من العزم الأول والعزم الثاني والتباين للبيانات التالية، مع ذكر العلاقة بينهم.

القيـم	3	6	9	12
التكـرار	4	2	3	1

س4: البيانات التالية توضح الأطوال بالسنتيمتر لمجموعة من التلاميذ في أحد المدارس.

138	162	155	165	124	145	130	140
127	135	145	128	152	155	125	145
152	147	122	134	162	160	163	150
137	160	165	132	125	120	150	155
167	157	153	168	136	158	156	128

المطلوب: أ - تبويب هذه البيانات في جدول التوزيع التكراري.

ب- رسم المضلع التكراري لهذه البيانات.

س5: أوجد الانحراف الربيعي للبيانات الآتية:-

الفـئة	15 -	20 -	25 -	30 -	35 -	40 -	المجموع
التكرار	5	7	12	18	10	8	60

انتهت الأسئلة

((الإجابة))

س1: البيانات التالية توضح الساعات التي يعملها مجموعة من المنتجين في الأسبوع في إحدى المؤسسات، والمطلوب إيجاد.

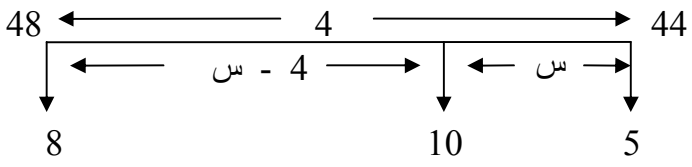
أ- المنوال بطريقة الرافعة.

ب- المنوال بطريقة الفروق (بيرسون).

فترات الساعات	32 -	36 -	40 -	44 -	48 -	52 -
عدد المنتجين	4	6	5	10	8	7

الجواب:-

أ: المنوال بطريقة الرافعة:



المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

ولإيجاد س نرسم الرافعة ونطبق في قانون الرافعة كما يلي:-

نلاحظ من الجدول أن الفترة المنوالية هي (44-48) وقانون الرافعة هو

$5 \times س = 8 (4 - س)$

$5 س = 32 - 8 س$

$13 س = 32 \Leftarrow س = \frac{32}{13} = 2.46$

المنوال = 44 + 2.46

= 46.46

ب: المنوال بطريقة الفروق (بيرسون)

الفترة المنوالية	التـــكرار	الفروق
48-44	5	5
	10	ـــ
	8	2

$$\frac{\text{الفرق العلوي}}{\text{الفرق السفلي}} = \frac{\text{س}}{4 - \text{س}}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{\text{س}}{4 - \text{س}}$$

$$5\ (4 - \text{س}) = 2\ \text{س}$$

$$20 - 5\ \text{س} = 2\ \text{س}$$

$$20 = 7\ \text{س}$$

$$\text{س} = \frac{20}{7} = 2.86$$

بالتعويض في القانون الآتي:-

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

المنوال = 44 + 2.86 = 46.86

****

س2: أ- تكلم باختصار عن أنواع العينات ومزايا كل منها.

ب- عرف الوسيط واكتب خواصه.

الجواب: انظر الجانب النظري في الكتاب المقرر.

س3: أوجد كلا من العزم الأول والعزم الثاني والتباين للبيانات التالية، مع ذكر العلاقة بينهم.

القيـم	3	6	9	12
التكـرار	4	2	3	1

الجواب:-

$$\text{العزم الأول} = \frac{\text{مجـ س} \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{(4 \times 3) + (2 \times 6) + (3 \times 9) + (1 \times 12)}{4 + 2 + 3 + 1}$$

$$= \frac{12 + 12 + 27 + 12}{10} = \frac{63}{10} = 6.3$$

$$\text{العزم الثاني} = \frac{\text{محـــ} (\text{س}^2 \times \text{ك})}{\text{محـــ ك}}$$

$$= \frac{1 \times {}^2(12) + 3 \times {}^2(9) + 2 \times {}^2(6) + 4 \times {}^2(3)}{10}$$

$$= \frac{1\times144 + 3\times81 + 2\times36 + 4\times9}{10} = \frac{144 + 243 + 72 + 36}{10} = \frac{495}{10}$$

$$= 49.5$$

$$\text{التباين} = \frac{\text{محـــ س}^2 \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}} - \left(\frac{\text{محـــ س} \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}}\right)^2$$

أي أن التباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول

$$= 49.5 - {}^2(6.3)$$

$$= 49.5 - 39.69$$

$$= 9.81$$

****

س4: البيانات التالية توضح الأطوال بالسنتيمتر لمجموعة من التلاميذ في أحد المدارس.

138	162	155	165	124	145	130	140
127	135	145	128	152	155	125	145
152	147	122	134	162	160	163	150
137	160	165	132	125	120	150	155
167	157	153	168	136	158	156	128

المطلوب: أ – تبويب هذه البيانات في جدول التوزيع التكراري.

ب– رسم المضلع التكراري لهذه البيانات.

الجواب:–

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

المدى = 168 – 120 = 48

بفرض أن طول الفترة = 10

$$\text{عدد الفترات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{48}{10} = 4.8 \cong 5$$

لإيجاد مركز الفترة.

$$\text{مركز الفترة} = \frac{\text{بداية الفترة} + \text{نهايتــها}}{2}$$

أو مركز الفترة = بداية الفترة + $\frac{1}{2}$ طول الفترة.

والجدول التكراري المطلوب هو:-

الفترات	علامات الحصر	التكرارات	مراكز الفترات
120 –	𝍸 𝍸 | | |	8	125
130 –	𝍸 𝍸 | |	7	135
140 –	𝍸 |	5	145
150 –	𝍸 𝍸 | 𝍸 𝍸	11	155
170 – 160	𝍸 | | | |	9	165
المجـــــــموع		40	

****

س5: أوجد الانحراف الربيعي للبيانات الآتية

الفـئة	15 -	20 -	25 -	30 -	35 -	40 -	المجموع
التكرار	5	7	12	18	10	8	60

الجواب:

الفترات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد
15 −	5	الأقل من 15 = 0
20 −	7	الأقل من 20 = 5
25 −	12	الأقل من 25 = 12
30 −	18	الأقل من 30 = 24
35 −	10	الأقل من 35 = 42
45 − 40	8	الأقل من 40 = 52
		الأقل من 45 = 60
المجموع	60	

$$\text{رتبة الربيع الأدنى} = \frac{\text{محـ ك}}{4} \qquad ر_1 = \frac{60}{4} = 15$$

$$\text{رتبة الربيع الأعلى} = \frac{3}{4} \text{ محـ ك}$$

$$ر_3 = 60 \times \frac{3}{4} = 45$$

$$\text{الربيع الأدنى} = \text{بداية فترة الربيع الأدنى} + \frac{\frac{\text{محـ ك}}{4} - \text{التكرار السابق المتجمع}}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة}$$

$$\text{الربيع الأدنى} = 25 + \frac{12 - 15}{12} \times 5$$

$$= 25 + \frac{5 \times 3}{12} = 25 + 1.25 = 26.25 \quad \ldots\ldots (1)$$

الربيع الأعلى = بداية فترة الربيع الأعلى + $\frac{\frac{3}{4}\text{محـ ك} - \text{التكرار السابق المتجمع}}{\text{التكرار المقابل}} \times$ طول الفترة

الربيع الأعلى = $35 + \frac{42 - 45}{10} \times 5$

$= 35 + \frac{5 \times 3}{10} = 35 + 1.5 = 36.5$ .... (2)

الانحراف الربيعي = $\frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$

من (1، 2)

الانحراف الربيعي = $\frac{26.25 - 36.5}{2} = \frac{10.25}{2} = 5.125$

****

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى
الجامعة المفتوحة - قسم الاقتصاد
امتحان مادة مبادئ الإحصاء (د. سرحان)

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:-

س1: أ- اكتب مميزات وعيوب المتوسط الحسابي.

ب- اذكر أهم المصادر التي تستقي منها المعلومات المختلفة للقيام بدراسة ظاهرة معينة.

س2: أوجد الانحراف المتوسط للبيانات الآتية:-

الفئات	14 -	18 -	22 -	26 -	30 -	34 -
التكرارات	7	5	10	4	6	8

س3: البيانات التالية تمثل عدد أيام التدريب لمجموعة من الرياضيين.

69	79	65	60	82	75	76	77
75	70	58	54	52	68	60	60
82	60	76	65	56	74	62	75
68	79	55	64	62	61	62	75
67	53	82	90	84	72	69	83

المطلوب: أ - كون جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات.

ب- ارسم المضلع التكراري لهذا التوزيع التكراري.

س4: أوجد الوسيط والمتوسط الحسابي والمنوال للقيم التالية.

((11، 3، 8، 9، 7، 8، 13، 5))

س5: أحسب الرقم القياسي التجميعي البسيط من الجدول التالي الذي يبين بعض السلع وأسعارها في 1995 وأسعارها في 1990.

نوع السلعة	السعر في 1995	السعر في 1990
جـــبن	1.5	1
حليب	2.4	2
زيتون	3.0	2.5

انتهت الأسئلة

((الإجابة))

س1: أ- أكتب مميزات وعيوب المتوسط الحسابي.

الجواب:-

1- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفر.

أي أن مجـــ (س - $\overline{س}$) = صفر

2- إذا كان لدينا عدد من أزواج القيم المتغيرين س، ص لظاهرتين مستقلتين، فإن المتوسط الحسابي لمجموع قيم الظاهرتين معاً يساوي مجموع المتوسط الحسابي لكل من الظاهرتين منفردتين، أي أنه إذا كان

ك$_1$ = س$_1$ ± ص$_1$، ك$_2$ = س$_2$ ± ص$_2$، ..... ، ك$_ن$ = س$_ن$ ± ص$_ن$

فإن محـــ ك = محـــ س ± مجـــ ص

بالقسمة على ن فإن $\overline{ك}$ = $\overline{س}$ ± $\overline{ص}$

3- مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي أصغر ما يمكن.

مجـــ (س - $\overline{س}$)^2 = أصغر ما يمكن

4- تدخل جميع القيم في حسابه.

5- لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة، وذلك لعدم قدرتنا على تحديد مركز الفئة المفتوحة.

6- لا يمكن حسابه في حالة البيانات النوعية.

7- يتأثر بالقيم المتطرفة.

8- لا يمكن إيجاده بيانياً.

س1: ب- اذكر أهم المصادر التي تستقي منها المعلومات المختلفة للقيام بدراسة ظاهرة معينة.

الجواب:-

أهم المصادر التي تستقي منها المعلومات المختلفة للقيام بدراسة ظاهرة معينة، هي:-

1- **المصادر التاريخية:** وهي تمثل البيانات المنشورة مثل الوثائق والمطبوعات والمنشورات والبيانات الإحصائية التي تصدرها المصالح المختلفة، وهي بيانات تم جمعها من قبل

لاستعمالها في أبحاث أخرى، وعند استخدام هذه المصادر فإنه يجب التحري والالتزام بالدقة واستيفاء البيانات من مصادرها الأصلية.

2- **مصادر ميدانية:** وهي تتم بالقيام بجمع البيانات المطلوبة عن ظاهرة معينة (المراد دراستها) من مصادرها عن طريق المشاهدة والملاحظة أو الاتصال بالأفراد الذين تكون بحوزتهم هذه البيانات، وتستخدم المصادر الميدانية عند عدم توفر البيانات من المصادر التاريخية، وهذا لا يعني يجب استخدام إحدى أنواع المصادر، ولكن هناك أبحاث تحتاج لاستخدام المصادر التاريخية والمصادر الميدانية معاً للحصول على البيانات اللازمة لها.

****

س2: أوجد الانحراف المتوسط للبيانات الآتية:-

الفئات	14 -	18 -	22 -	26 -	30 -	34 -
التكرارات	7	5	10	4	6	8

الجواب:

لإيجاد الانحراف المتوسط للبيانات، يجب أن نوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ لكي نحسب انحراف القيم عنه في إيجاد الانحراف المتوسط.

والمتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجـــ س}_ر \times ك}{\text{مجـــ ك}}$ حيث $س_ر$ هي مراكز الفترات

$$\overline{س} = \frac{8 \times 36 + 6 \times 32 + 4 \times 28 + 10 \times 24 + 5 \times 20 + 7 \times 16}{40}$$

$$\overline{س} = \frac{288 + 192 + 112 + 240 + 100 + 112}{40} = \frac{1044}{40} = 26.1$$

الفترات	التكرارات	مراكز الفترات س	| س - $\bar{س}$ |	| س - $\bar{س}$ | × ك	| س - $\bar{س}$ | × ك
14 -	7	16	|26.1-16 |	= 7 × 10.1	70.7
18 -	5	20	|26.1-20 |	= 5 × 6.1	30.5
22 -	10	24	|26.1-24 |	= 10 × 2.1	21.0
26 -	4	28	|26.1-28 |	= 4 × 1.9	7.6
30 -	6	32	|26.1-32 |	= 6 × 5.9	35.4
38- 34	8	36	|26.1-36 |	= 8 × 9.9	79.2
المجموع	40				244.4

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجـــ} \left| س - \bar{س} \right| \times ك}{\text{مجـــ ك}}$$

من الجدول نجد أن:

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{244.4}{40} = 6.11$$

****

س3: البيانات التالية تمثل عدد أيام التدريب لمجموعة من الرياضيين.

77	76	75	82	60	65	79	69
60	60	68	52	54	58	70	75
75	62	74	56	65	76	60	82
75	62	61	62	64	55	79	68
83	69	72	84	90	82	53	67

المطلوب: أ – كون جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات.

ب– ارسم المضلع التكراري لهذا التوزيع التكراري.

الجواب:–

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

المدى = 90 – 52 = 38

بفرض أن طول الفترة = 10

عدد الفترات = $\frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{38}{10} = 3.8 = 4$

الفترات	علامات الحصر	التكرار	مراكز الفترات
50 –	| 𝍸	6	55
60 –	𝍸 𝍸 𝍸 |	16	65
70 –	𝍸 𝍸 ||	12	75
80 –	𝍸	5	85
100– 90	|	1	95
المجـــــــموع		40	

مركز الفترة = $\frac{\text{بداية الفترة + نهاية الفترة}}{2}$

أو مركز الفترة = بداية الفترة + $\frac{1}{2}$ طول الفترة.

****

س4: أوجد الوسيط والمتوسط الحسابي والمنوال للقيم التالية.

((11، 3، 8، 9، 7، 8، 13، 5))

الجواب:-

لإيجاد **الوسيط:**

نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً كما يلي:

(3، 5، 7، 8، 8، 9، 11، 13)

رتبتي الوسيط هما:

$$\frac{\text{ن}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{\text{ن}}{2} + 1 = 4 + 1 = 5$$

وحيث أن عدد القيم زوجي فإن الوسيط يقع بين القيمتين الرابعة والخامسة.

القيمة الرابعة هي 8، والقيمة الخامسة هي 8

الوسيط = متوسط القيمتين = $\frac{8 + 8}{2} = 8$

المتوسط الحسابي:-

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{\text{مجـــ س}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{13 + 11 + 9 + 8 + 8 + 7 + 5 + 3}{8}$$

$$= \frac{64}{8} = 8$$

المنوال = القيمة الأكثر تكراراً من بين القيم.

نلاحظ أن العدد (القيمة) 8 هي الأكثر تكراراً، وهي تساوي المنوال.

نلاحظ أن الوسيط = المتوسط الحسابي = المنوال = 8.

****

س5: أحسب الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار من الجدول التالي الذي يبين بعض السلع وأسعارها في 1995، وأسعارها في 1990.

نوع السلعة	السعر في 1995	السعر في 1990
جـــبن	1.5	1
حليب	2.4	2
زيتون	3.0	2.5

الجواب:-

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار} = \frac{\text{مجـــ } P_1}{\text{مجـــ } P_0} \times 100$$

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار} = \frac{3.0 + 2.4 + 1.5}{2.5 + 2 + 1} \times 100$$

$$= \frac{6.9}{5.5} \times 100$$

$$= \% \ 125.45$$

****

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى
الجامعة المفتوحة - قسم الاقتصاد
امتحان مادة مبادئ الإحصاء (د. الطبولي)

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:-

س1: أ- عرف كلاً من خطأ الصدفة وخطأ التحيز، موضحاً الأسباب التي تؤدي إلى ظهور خطأ التحيز.

ب- عرف التباين؟

س2: أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية:-

الفترات	44 -	48 -	52 -	56 -	60 -	64 -
التكرارات	2	3	4	6	2	3

س3: البيانات التالية توضح درجات مجموعة من الطلاب في اختبار التاريخ:-

70	76	71	79	84	75	68	86
77	61	77	84	75	69	92	92
63	80	70	59	62	84	77	55
77	84	70	92	85	72	68	64
71	64	81	73	81	62	78	85

المطلوب: أ - كون جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات.

ب- ارسم المنحني التكراري لهذه التوزيعات التكرارية.

س4: أوجد الوسيط والمنوال للبيانات التالية.

الفترات	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -
التكرارات	4	8	13	10	2	3

س5: أ- عرف السعر النسبي للسلعة في سنة معينة (الرقم القياسي البسيط).

ب- أوجد العزم الأول والعزم الثاني حول المتوسط الحسابي للقيم التالية (12، 10، 8، 6)

انتهت الأسئلة

((الإجابة))

س1: أ- عرف كلاً من خطأ الصدفة وخطأ التحيز، موضحاً الأسباب التي تؤدي إلى ظهور خطأ التحيز.

الجواب:-

- **<u>خطأ الصدفة:</u>** هو الخطأ الذي قد يتعرض له الباحث عندما تتعرض نتائجه الخاصة بالعينة لعوامل الصدفة البحتة، ويحدث هذا نظراً لأن اختيار عدد غير محدود من مفردات المجتمع بطريقة عشوائية قد لا يؤدي بالضرورة للحصول على عينة تتمثل فيها كل خصائص وصفات المجتمع الكلي الذي سحبت منه هذه العينة بالرغم من استخدام الباحث للأساليب العلمية السليمة في الاختيار، وخطأ الصدفة يحدث نتيجة لعاملين هما:-

1- عدم التجانس في مفردات المجتمع، فكلما كانت مفردات المجتمع غير متجانسة كلما زاد احتمال تعرض الباحث لخطأ الصدفة.

2- حجم العينة المسحوبة بالنسبة لحجم المجتمع الذي سحبت منه هذه العينة، فكلما كان حجم العينة كبيراً بالنسبة لحجم المجتمع الذي سحبت منه، كلما نقص احتمال تعرض الباحث لخطأ الصدفة.

- **<u>خطأ التحيز:</u>** فهو ذلك الخطأ الذي ينشأ نتيجة لعوامل إنسانية بحتة ويحدث خطأ التحيز لعدة أسباب منها:-

1- سوء اختيار العينة، أي أن العينة لا تمثل المجتمع الذي سحبت منه، وذلك بسبب التدخل الشخصي في اختيارها، بحيث يؤثر الشخص (الباحث) نفسه في طريقة اختيار العينة، بحيث يضطر الباحث إلى إحلال مفردات مكان المفردات التي اختيرت، كما أنه من الممكن أن يتأثر الباحث بآرائه الشخصية فيقع في خطأ التحيز، ومثال ذلك: عندما يقوم الباحث باختيار عينة لغرض بحث تسويقي عن الأغذية المحفوظة، وكانت هذه العينة التي اختارها هي الأسر الموجودة في وقت معين من النهار، ولم يختار الأسر الأخرى غير الموجودة، فيضطر أن يضع أسر أخرى مكان هذه الأسر المختارة، وإذا بحثنا في سبب تغيب الأسر غير الموجودة في ذلك الوقت من النهار فإننا نجد أنهم أسر تشتغل في ذلك الوقت وهي الأسر الأكثر استخداماً لهذا النوع من الأغذية المحفوظة، بعكس الأسر الموجودة، وبالتالي فإن هذه الأسر لها آراء عن الأغذية المحفوظة تختلف عن آراء ورغبات الأسر الأخرى،

وبالتالي فإن آراءهم ورغباتهم لم تؤخذ بعين الاعتبار، وهذا يعرض النتائج الخاصة بالبحث إلى خطأ التحيز.

وخطأ التحيز أخطر من خطأ الصدفة في مدى تأثيره على نتائج عينة البحث لصعوبة تقديره، لأن خطأ الصدفة يمكن علاجه بواسطة قوانين الاحتمالات، وبالتالي الحصول على نتائج مقبولة.

س1: ب- عرف التباين.

الجواب:-

هو المقياس الرقمي الذي يصلح كمقياس لدرجة تشتت القيم.

والتباين هو مربع الانحراف المعياري.

وهو يساوي أيضاً العزم الثاني – مربع العزم الأول.

****

س2: أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية:-

الفترات	44 -	48 -	52 -	56 -	60 -	64 -
التكرارات	2	3	4	6	2	3

الجواب:-

الفترات	التكرارات ك	مراكز الفئات س	س × ك	$س^2$	$س^2 \times ك$
44 -	2	46	92	2116	4232
48 -	3	50	150	2500	7500
52 -	4	54	216	2916	11664
56 -	6	58	348	3364	20184
60 -	2	62	124	3844	7688
64 - 68	3	66	198	4356	13068
المجموع	20		1128		64336

$$\text{فإن الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\text{مجـــ } س^2 \times ك}{\text{مجـــ } ك} - \left(\frac{\text{مجـــ } س \times ك}{\text{مجـــ } ك}\right)^2}$$

نعوض من الجدول في قانون الانحراف المعياري كما يلي:-

$$\text{فإن الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{64336}{20} - \left[\frac{1128}{20}\right]^2}$$

$$\text{فإن الانحراف المعياري} = \sqrt{3216.80 - (56.4)^2}$$

$$= \sqrt{3216.80 - 3180.96}$$

$$= \sqrt{35.84} = 5.99$$

****

س3: البيانات التالية توضح درجات مجموعة من الطلاب في اختبار التاريخ:-

86	68	75	84	79	71	76	70
92	92	69	75	84	77	61	77
55	77	84	62	59	70	80	63
64	68	72	85	92	70	84	77
85	78	62	81	73	81	64	71

المطلوب: أ - كون جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات.

الجواب:-

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

المدى = 92 – 55 = 37

بفرض أن طول الفترة = 5

$$\text{عدد الفترات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{37}{5} = 7.4 \approx 8$$

الفترات	علامات الحصر	التكرارات	مراكز الفترات
50 – 55	||	2	57.5
55 – 60	|<s>||||</s>	6	62.5
60 – 65	|||	3	67.5
65 – 70	||<s>||||</s>	7	72.5
70 – 75	||||<s>||||</s>	9	77.5
75 – 80	||<s>||||</s>	7	82.5
80 – 85	|||	3	87.5
85 – 90	|||	3	92.5
المجـــموع		40	

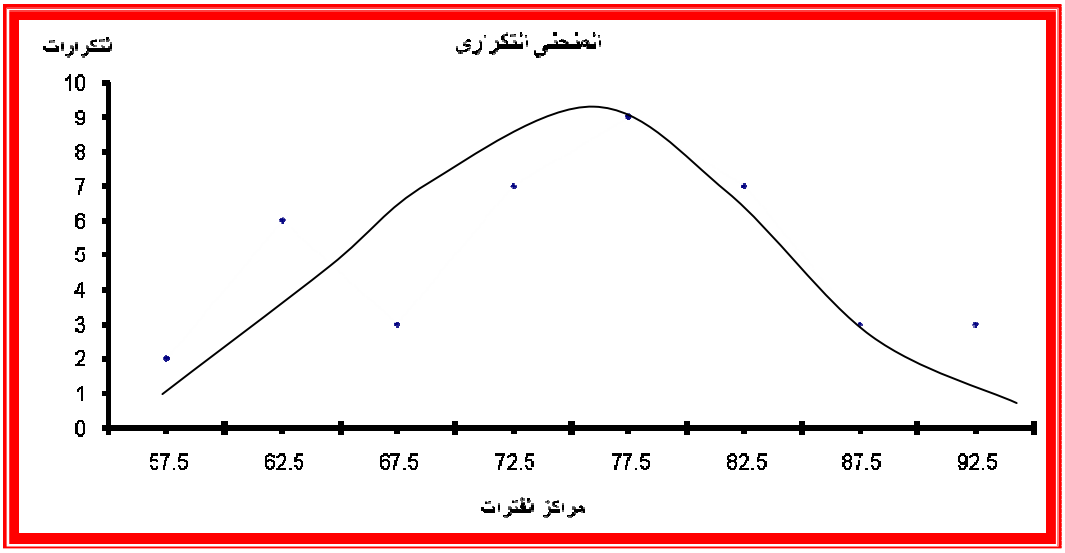
س3: ب– ارسم المنحني التكراري لهذه التوزيعات التكرارية.

الجواب:–

لرسم المنحنى التكرار للتوزيعات التكرارية يجب أن نحسب مراكز الفترات، حيث أن:

$$\text{مركز الفترة} = \frac{\text{بداية الفترة} + \text{نهاية الفترة}}{2}$$

أو مركز الفترة = بداية الفترة + $\frac{1}{2}$ طول الفترة.



****

س4: أوجد الوسيط والمنوال للبيانات التالية.

الفترات	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -
التكرارات	4	8	13	10	2	3

الجواب:-

أولاً: ايجاد الوسيط

نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد كما يلي:-

الفترات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد
10 -	4	الأقل من 10 = 0
20 -	8	الأقل من 20 = 4
30 -	13	الأقل من 30 = 12
40 -	10	الأقل من 40 = 25
50 -	2	الأقل من 50 = 35
70 - 60	3	الأقل من 60 = 37
		الأقل من 70 = 40
المجموع	40	

$$\text{رتبة } ر_2 = \text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

نبحث عن موقع رتبة الوسيط في الجدول المتجمع الصاعد.

ثم نعوض من الجدول في قانون الوسيط، وهو:-

$$\text{الوسيط} = \text{بداية الفترة الوسطية} + \frac{\frac{\text{مجـ ك}}{2} - \text{التكرار السابق من المتجمع الصاعد}}{\text{التكرار المقابل (الأصلي)}} \times \text{طول الفترة}$$

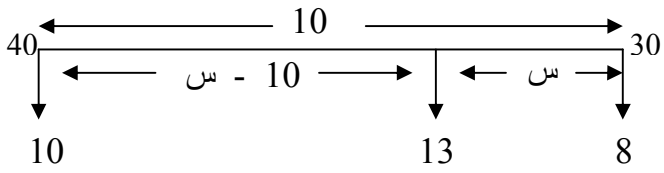
$$\text{الوسيط} = 30 + 10 \times \frac{12 - 20}{13}$$

$$= 30 + \frac{10 \times 8}{13} = 30 + 6.15 = 36.15$$

ثانياً:- لإيجاد المنوال

أولاً تحديد الفترة المنوالية وهي الفترة المقابلة لأكبر تكرار

طريقة الرافعة



$$10 (10 - \text{س}) = 8 \times \text{س}$$

$$100 - 10\text{س} = 8\text{س}$$

$$100 = 10\text{س} + 8\text{س}$$

$$18\text{س} = 100 \Leftarrow \text{س} = \frac{100}{18} = 5.55$$

$$\text{المنوال} = 30 + 5.55$$

$$= 35.55$$

****

س5: أ- عرف السعر النسبي للسلعة في سنة معينة (الرقم القياسي البسيط).

الجواب:-

الرقم القياسي البسيط أو السعر النسبي للسلعة في سنة معينة هو معدل التغير المئوي في قيمة ما بالنسبة لقيمة أخرى مأخوذة كأساس، ويمكن الحصول على الرقم النسبي البسيط بقسمة القيمة الأولى على القيمة الثانية المأخوذة كأساس، وذلك لقياس التغير.

أي أن الرقم القياسي البسيط للسلعة في سنة معينة ولتكن 1995 بالنسبة لسنة الأساس 1990 يكون كما يلي:-

$$\text{الرقم القياسي البسيط} = \frac{\text{سعر السلعة في سنة المقارنة 1995}}{} \times 100$$

سعر السلعة في سنة الأساس 1990

ب- أوجد العزم الأول والعزم الثاني حول المتوسط الحسابي للقيم التالية 12، 10، 8، 6.

الجواب:-

لإيجاد العزوم حول المتوسط الحسابي يجب أن نحسب المتوسط الحسابي أولاً.

$$\overline{س} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{6 + 8 + 10 + 12}{4}$$ حيث ن عدد القيم

$$= \frac{36}{4} = 9$$

$$\text{العزم الأول حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـ (س} - \overline{س})}{\text{ن}}$$

$$\text{العزم الأول للقيم (حول المتوسط)} = \frac{(9-6) + (9-8) + (9-10) + (9-12)}{4}$$

$$= \frac{3 - 1 - 1 + 3}{4} = \frac{\text{صفر}}{4} = \text{صفر}$$

$$\text{العزم الثاني حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـ (س} - \overline{س})^2}{\text{ن}}$$

$$\text{العزم الثاني للقيم (حول المتوسط)} = \frac{^2(9-6) + ^2(9-8) + ^2(9-10) + ^2(9-12)}{4}$$

$$= \frac{^2(3-) + ^2(1-) + ^2(1) + ^2(3)}{4} = \frac{9 + 1 + 1 + 9}{4} = \frac{20}{4}$$

$$= 5$$

****

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى
الجامعة المفتوحة - قسم الاقتصاد
امتحان مادة مبادئ الإحصاء (د. سرحان)

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:-

س1: أ- أذكر مقاييس التشتت.

ب- تنقسم الاستمارات الإحصائية تبعاً لطريقة استيفائها إلى نوعين، وضح هذين النوعين؟

س2: البيانات التالية توضح درجات مجموعة من الطلاب في مادة الإحصاء:-

30	32	36	45	35	33	31	36	39	26
37	31	35	33	39	31	38	30	36	34
35	35	29	42	42	34	36	41	39	38
33	38	34	28	30	41	38	35	34	42

المطلوب: أ - كون جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات.

ب- ارسم المنحني التكراري لهذا التوزيع التكراري.

س3: الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لخمسين طفلاً حسب أوزانهم بالكيلوجرام.

فئة الوزن	- 4	- 8	- 12	- 16	- 20	- 24	- 30
عدد الأطفال	5	4	9	15	12	2	3

المطلوب: إيجاد المنوال لهذه البيانات بطريقتي الرافعة وبيرسون.

س4: أوجد الانحراف الربيعي للبيانات الآتية:-

الفئات	5 -	10 -	15 -	20 -	25 -	30 -
التكرارات	10	8	12	18	5	7

5: يبين الجدول الذي أمامك أسعار البيع بالفروق والاستهلاك السنوية المتوسطة لكل أسرة للمنتوجات الموضحة فيه، وباعتبار سنة 1986 سنة الأساس، احسب الرقم القياسي للأسعار باستعمال كميات: أ – سنة الأساس كأوزان الترجيح الأسعار (رقم لاسبير).

ب- سنة المقارنة كأوزان لترجيح الأسعار (رقم باش).

نوع السلعة	الأسعار بالدينار		الكميات بالكيلوجرام	
	1986	1996	1986	1996
جبن	1.50	2.00	15	30
حليب	1.00	1.00	10	25
زبدة	0.75	1.50	5	20

انتهت الأسئلة

((الإجابة))

س1: أ- أذكر مقاييس التشتت.

الجواب:-

مقاييس التشتت هي:-

3- المدى.

4- الانحراف الربيعي.

5- الانحراف المتوسط المطلق.

6- الانحراف المعياري.

7- التباين.

8- معامل الاختلاف.

س1: ب- تنقسم الاستمارات الإحصائية تبعاً لطريقة استيفائها إلى نوعين، وضح هذين النوعين؟

الجواب:-

توجد أنواع من الاستمارات الإحصائية يتم عن طريقها جمع البيانات، وهذه الاستمارات هي:- كشف البحث، صحيفة الاستبيان.

1- كشف البحث: عبارة عن كشف يقوم الباحث أو المكلف بجمع البيانات بملئه بنفسه، ويستعمل هذا النوع من الاستمارات في الأماكن التي تنتشر بها الأمية، ويعاب على هذا النوع من الاستمارات أنه يخضع لخطأ التحيز، لأن الباحث أو المكلف يجمع البيانات يمكن أن يؤثر في إجابات المبحوثين بدون قصد.

2- والنوع الثاني هو صحيفة الاستبيان: هي صحيفة يقوم المبحوث بملئها، فالباحث أو المكلف بجمع البيانات يقوم بتسليم هذه الاستمارة أو إرسالها بالبريد على أن يعيد إرسالها إلى الباحث حال إكمالها، وفي حالة إرسالها بالبريد يتم إرسال مظروف مكتوب عليه العنوان مع طابع بريد حتى يمكن تشجيع المبحوث على إرسالها حال إكمالها دون مشقة أو خسارة حتى ولو كان طابع بريد، ويتم كذلك وضع شروح بسيطة عن الأسئلة وكيفية ملء الاستمارة، وكذلك تعريف المبحوث على أن كل المعلومات التي يدلي بها تعتبر سرية ولغرض البحث العلمي فقط.

****

س2: البيانات التالية توضح درجات مجموعة من الطلاب في مادة الإحصاء:-

26	39	36	31	33	35	45	36	32	30
34	36	30	38	31	39	33	35	31	37
38	39	41	36	34	42	42	29	35	35
42	34	35	38	41	30	28	34	38	33

المطلوب: أ - كون جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات.

ب- ارسم المنحني التكراري لهذا التوزيع التكراري.

الجواب:-

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

المدى = 45 – 26 = 19

بفرض أن طول الفترة = 5

$$\text{عدد الفترات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{19}{5} = 4$$

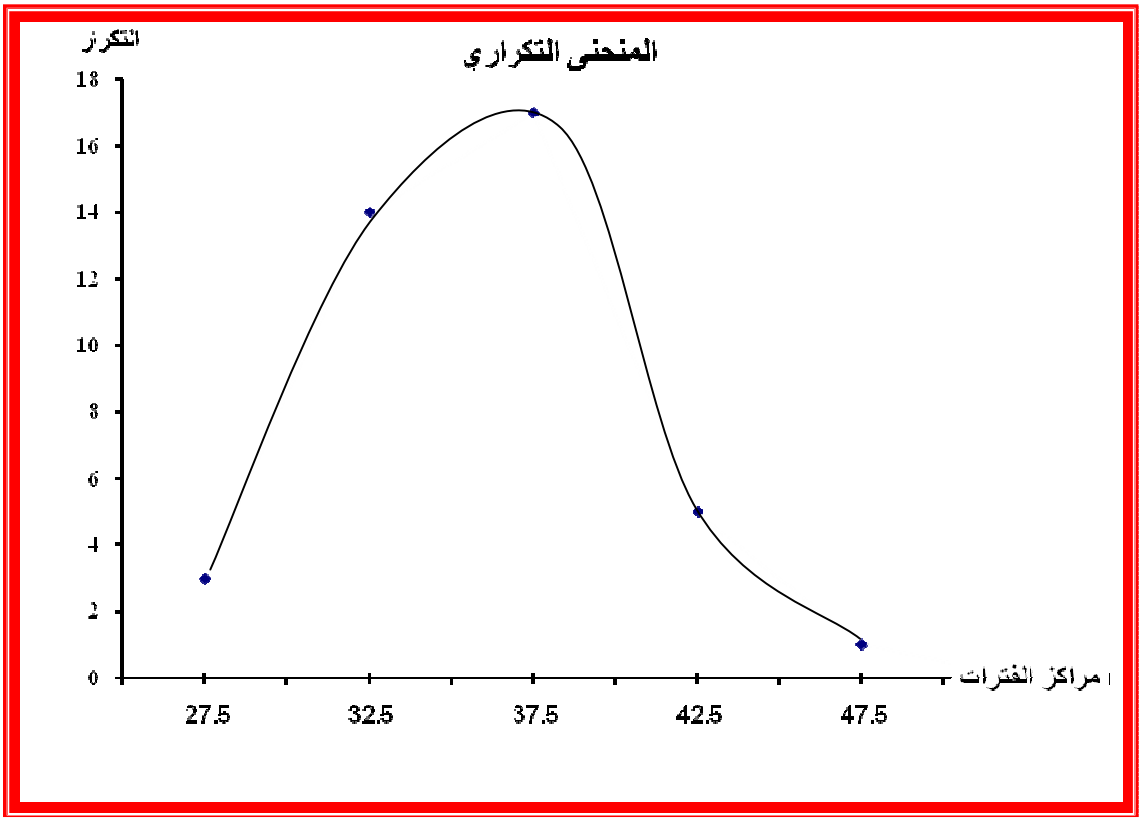
= 4 + 1 = 5 فترات

الفترات	علامات الحصر	التكرارات	مراكز الفترات
25 –	|||	3	27.5
30 –	|||| ||||	14	32.5
35 –	|||| |||| |||| ||	17	37.5
40 –	||||	5	42.5
50 – 45		1	47.5
المجـــــــموع		40	

لرسم المنحنى نحسب مراكز الفترات لكي يتم رسم العلاقة بين مراكز الفترات والتكرارات.

$$\text{مركز الفترة} = \frac{\text{بداية الفترة} + \text{نهاية الفترة}}{2}$$

أو مركز الفترة = بداية الفترة + $\frac{1}{2}$ طول الفترة.



****

س3: الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لخمسين طفلاً حسب أوزانهم بالكيلوجرام.

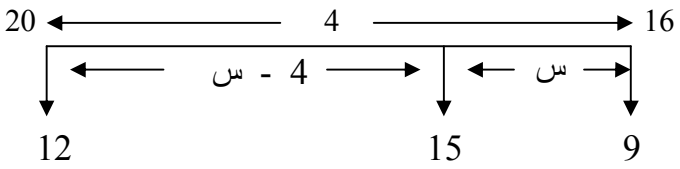
فئة الوزن	− 4	− 8	− 12	− 16	− 20	− 24	− 30
عدد الأطفال	5	4	9	15	12	2	3

المطلوب: إيجاد المنوال لهذه البيانات بطريقتي الرافعة وبيرسون.

الجواب:-

أولاً: طريقة الرافعة لإيجاد المنوال

قانون الرافعة هو: القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها



$9 \times س = 12 (4 - س)$

$9 س = 48 - 12 س$

$9 س + 12 س = 48$

$21 س = 48 \Leftarrow س = \frac{48}{21} = 2.28$

المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

$= 16 + 2.28 = 18.28$

ثانياً:- طريقة بيرسون (الفروق)

نحسب قيمة س باستخدام الفروق.

الفرق	التكرار	الفترات
6	9	16 – 12
0	15	20 – 16
3	12	24 – 20

$$\frac{6}{3} = \frac{س}{4 - س}$$

$3 س = 24 - 6 س$

$9 س = 24 \Leftarrow س = \frac{24}{9}$

$س = 2.66$

ولكن المنوال = بداية الفترة المنوالية + س

$= 16 + 2.66 = 18.66$

****

س4: أوجد الانحراف الربيعي للبيانات الآتية:-

الفئات	5 -	10 -	15 -	20 -	25 -	30 -
التكرارات	10	8	12	18	5	7

الجواب:

$$\text{الانحراف الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2} \qquad (1)$$

$$\text{الربيع الأعلى} = \text{بداية فترة الربيع الأعلى} + \frac{\frac{3}{4}\text{محـ ك} - \text{التكرار السابق من المتجمع الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة} \qquad (2)$$

$$\text{الربيع الأدنى} = \text{بداية فترة الربيع الأدنى} + \frac{\frac{\text{محـ ك}}{4} - \text{التكرار السابق من المتجمع الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة} \qquad (3)$$

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي:-

الفترات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد
5 -	10	الأقل من 5 = 0
10 -	8	الأقل من 10 = 10
15 -	12	الأقل من 15 = 18
20 -	18	الأقل من 20 = 30
25 -	5	الأقل من 25 = 48
35 - 30	7	الأقل من 30 = 53
		الأقل من 35 = 60
المجموع	60	

$$\text{رتبة الربيع الأعلى} = \frac{3\ \text{محـ ك}}{4} = \frac{3 \times 60}{4} = 45$$

$$\text{الربيع الأعلى} = 20 + \frac{30 - 45}{18} \times 5$$

$$= \frac{75}{18} + 20 = 4.167 + 20 = 24.167 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{رتبة الربيع الأدنى} = \frac{\text{محـ ك}}{} = \frac{60}{} = 15$$

$$\overline{4} \qquad \overline{4}$$

$$\text{الربيع الأدنى} = 10 + \frac{10 - 15}{8} \times 5$$

$$= 10 + \frac{25}{8} = 10 + 3.125 = 13.125 \quad \ldots\ldots (2)$$

من (3)، (2) نعوض في قانون الانحراف الربيعي ... (1)

$$\text{الانحراف الربيعي} = \frac{13.125 - 24.167}{2} = \frac{11.042}{2} = 5.521$$

****

س5: يبين الجدول الذي أمامك أسعار البيع بالفروق والاستهلاك السنوية المتوسطة لكل أسرة للمنتوجات الموضحة فيه، وباعتبار سنة 1986 سنة الأساس، احسب الرقم القياسي للأسعار باستعمال كميات:

أ – سنة الأساس كأوزان الترجيح الأسعار (رقم لاسبير).

ب– سنة المقارنة كأوزان لترجيح الأسعار (رقم باش).

نوع السلعة	الأسعار بالدينار		الكميات بالكيلوجرام	
	1986	1996	1986	1996
جبن	1.50	2.00	15	30
حليب	1.00	1.00	10	25
زبدة	0.75	1.50	5	20

الجواب:–

$$\text{مقياس رقم لاسبير} = \frac{\text{مجـ } P_1 q_0}{\text{مجـ } P_0 q_0} \times 100$$

ومن الجدول نجد أن مقياس رقم لاسبير المطلوب =

$$= \frac{1.5 \times 5 + 1 \times 10 + 2 \times 15}{0.75 \times 5 + 1.0 \times 10 + 1.5 \times 15} \times 100$$

$$= \frac{7.5 + 10 + 30}{3.75 + 10.0 + 22.5} \times 100$$

$$\% 131 = 100 \times \frac{47.5}{36.25} =$$

$$\text{مقياس رقم باش} = 100 \times \frac{\text{مجـ} \; p_1 q_1}{\text{مجـ} \; p_0 q_1}$$

ومن الجدول نجد أن مقياس رقم باش المطلوب =

$$100 \times \frac{1.5 \times 20 + 1 \times 25 + 2 \times 30}{0.75 \times 20 + 1 \times 25 + 1.5 \times 30} =$$

$$100 \times \frac{30 + 25 + 60}{15 + 25 + 45} =$$

$$\% 135.29 = 100 \times \frac{115}{85} =$$

****

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى
الجامعة المفتوحة - قسم الاقتصاد
امتحان مادة مبادئ الإحصاء (د. الطبولي)

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:-

س1: أ- تكلم باختصار عن الأنواع المختلفة للعينات ومزايا كل منها.

ب- عرف المنوال مع ذكر عيوبه.

س2: أ- البيانات التالية توضح توزيع مجموعة من المنتجين حسب ساعات عملهم في الأسبوع.

المطلوب:- إيجاد الوسيط لهذه البيانات.

الفترات	30 -	35 -	40 -	45 -	50 -
التكرارات	12	13	35	10	20

س3: أوجد الانحراف المتوسط للقيم التالية:-

((5، 8، 11، 6، 4، 15، 7))

س4: كون جدول التوزيع التكراري للبيانات التالية، ثم ارسم المضلع التكراري لها.

89	52	64	41	78	60	61	69	90	77
70	74	61	67	60	53	67	52	52	64
82	71	67	69	67	61	71	89	84	51
65	75	78	82	45	54	63	54	66	69

س5: أوجد العزم الثالث والرابع حول المتوسط الحسابي للقيم التالية.

القـــــيم	4	8	12	16
التكرارات	2	5	9	4

انتهت الأسئلة

((الإجابة))

س1: أ- تكلم باختصار عن الأنواع المختلفة للعينات ومزايا كل منها.

الجواب:-

هناك عدة أنواع للعينات، ويتم اختيارها على اعتبارات معينة مثل طبيعة التباين والاختلاف بين مفردات المجتمع المراد دراسته، وكذلك التكاليف التي يتحملها الباحث، وهذه الأنواع هي:-

1- **العينة العشوائية البسيطة:** ويتم الاختيار في هذه العينة طبقاً للطريقة التي تعطي فرص متساوية لجميع مفردات المجتمع، فمثلاً، إذا أريد سحب عينة تتكون من خمس عمال من بين خمسين عاملاً، ففي هذه الحالة نقوم بوضع أرقام لهؤلاء العمال من (1) إلى (50) ثم نأتي بقصاصات ورق صغيرة ونكتب على كل قصاصة رقم، أي القصاصة الأولى عليها رقم (1)، والثانية رقم (2) وهكذا... حتى رقم (50) ثم نضع هذه القصاصات في سلة ونخلطها جيداً ثم نقوم بسحب خمس قصاصات منها واحدة تلو الأخرى، وهناك طريقة أخرى لتسهيل عملية الاختيار وخصوصاً إذا كان المجتمع المراد دراسته بهذه الطريقة ذو حجم كبير، وهذه الطريقة هي طريقة جداول الأرقام العشوائية، وهي عبارة عن مصفوفات من الأعداد التي تحددت قيمتها وترتيبها بأساليب عشوائية، فإذا أردنا اختيار عينة عشوائية من خمس عمال من بين خمسين عاملاً فإننا نبدأ بالعمود الأول المكون من خانتين، ونختار الأرقام الأقل من 50 حتى نستوفي الأرقام المطلوبة الخمسة، مع مراعاة ألا يتكرر الرقم المأخوذ مهما تكرر ظهوره في الأعمدة، ويمكن أن نبدأ في اختيار الأرقام من أي مكان في الجدول عشوائياً، والسير في أي اتجاه رأسي أو أفقي أو هندسي منتظم.

2- **العينة الطبقية:** وفيها يتم تقسيم المجتمع المراد دراسته إلى طبقات متجانسة في ظاهرة لها علاقة بالمتغير المطلوب دراسته، ثم يتم سحب عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة على حدة، بحيث تكون نسبة مفردات الطبقة في العينة مساوياً لنسبة مفردات الطبقة في المجتمع الكلي، مثلاً يتم سحب عينة طبقية لأطوال الأطفال (بنين – بنات) سن خمس سنوات فإنه يتم سحب عينة من كل طبقة على حدة (بنين على حدة وبنات على حدة) حتى تصلح العينة لتمثل المجتمع المطلوب دراسته والذي يكون على درجة كبيرة من التباين.

3- **العينة المرحلية:** يتم اختيارها بتقسيم المجتمع إلى مجموعات، ثم سحب عينة عشوائية من المجموعات نفسها، فيقسم المجتمع مثلاً إلى وحدات أولية ثم تختار عينة من هذه الوحدات

كمرحلة أولى ثم نقسم الوحدات الأولية المختارة إلى وحدات ثانوية، ثم نؤخذ منها عينة كمرحلة ثانية، ثم نقسم الوحدات الثانوية المختارة إلى وحدات أصغر، وهكذا..، حتى نحصل على النتيجة المطلوبة، ويستخدم هذا النوع من العينات في الحالات التي يكون فيها المجتمع محل الدراسة كبيراً جداً.

4- **العينة المنتظمة:** يتم سحب هذه العينة بطريقة منتظمة فإذا أردنا سحب 10 مفردات من قائمة تشتمل على 100 مفردة، أي يتم سحب مفردة من كل 10 مفردات في المجتمع المراد بحثه، ففي هذه الحالة نختار مفردة بطريقة عشوائية من العشرة مفردات الأولى، ثم بعد ذلك نختار باقي مفردات العينة بطريقة منتظمة من القائمة، فمثلاً لو قمنا باختيار مفردة بطريقة عشوائية من العشرة مفردات الأولى، وليكن رقم (4) في هذه الحالة ثم اختيار باقي مفردات العينة بطريقة منتظمة من القائمة، وتكون 14، 24، 34، 44 ... 94، ويمكن النظر إلى هذه الطريقة بأنها طريقة ممثلة للمجتمع.

س1: ب- عرف المنوال مع ذكر عيوبه.

الجواب:-

المنوال هو تلك القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها. ويمكن أن يكون للقيم (منوالين) في حالة إذا كان يوجد قيمتين متكررتين أكثر من غيرهم.

عيوب المنوال:

1- أقل مقاييس النزعة المركزية استعمالاً.

2- أقل مقاييس النزعة المركزية دقـــــة.

3- لا تستـــــخدم فيه كل القيم.

****

س2: أ- البيانات التالية توضح توزيع مجموعة من المنتجين حسب ساعات عملهم في الأسبوع.

المطلوب:- إيجاد الوسيط لهذه البيانات

الفترات	30 -	35 -	40 -	45 -	50 -
التكرارات	12	13	35	10	20

الجواب:-

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي:-

الفترات أو الساعات	التكرار (عدد المنتجين)	التكرار المتجمع الصاعد
- 30	12	أقل من 30 = 0
- 35	13	أقل من 35 = 12
- 40	35	أقل من 40 = 25
- 45	10	أقل من 45 = 60
55 - 50	20	أقل من 50 = 70
		أقل من 55 = 90
المجموع	90	

رتبة $ر_2$ = رتبة الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{90}{2} = 45$

الوسيط = بداية الفترة الوسطية + $\frac{\frac{\text{مجـ ك}}{2} - \text{التكرار السابق من المتجمع الصاعد}}{\text{التكرار المقابل (الأصلي)}} \times$ طول الفترة

$$= 40 + \frac{25-45}{35} \times 5$$
$$= 40 + \frac{5\times20}{35}$$
$$= 40 + \frac{100}{35}$$
$$= 40 + 2.86$$
$$= 42.86$$

****

س3: أوجد الانحراف المتوسط للقيم التالية:-

((5، 8، 11، 6، 4، 15، 7))

الجواب:-

أولاً نوجد المتوسط الحسابي للقيم، وهو $\overline{س}$

$$\text{المتوسط الحسابي } (\overline{س}) = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{\text{محـــ س}}{\text{ن}}$$

$$\overline{س} = \frac{7 + 15 + 4 + 6 + 11 + 8 + 5}{7}$$

$$= \frac{56}{7} = 8$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{محـــ } |س - \overline{س}|}{\text{ن}}$$

$$= \frac{[8 - 7] + [8 - 15] + [8 - 4] + [8 - 6] + [8 - 11] + [8 - 8] + [8 - 5]}{7}$$

$$= \frac{|-3| + \text{صفر} + |3| + |-2| + |-4| + |7| + |-1|}{7}$$

$$= \frac{1 + 7 + 4 + 2 + 3 + 3}{7}$$

$$= \frac{20}{7} = 2.86$$

****

س4: كون جدول التوزيع التكراري للبيانات التالية، ثم ارسم المضلع التكراري لها.

89	52	64	41	78	60	61	69	90	77
70	74	61	67	60	53	67	52	52	64
82	71	67	69	67	61	71	89	84	51
65	75	78	82	45	54	63	54	66	69

الجواب:-

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

المدى = 90 – 41 = 49

بفرض أن طول الفترة = 10

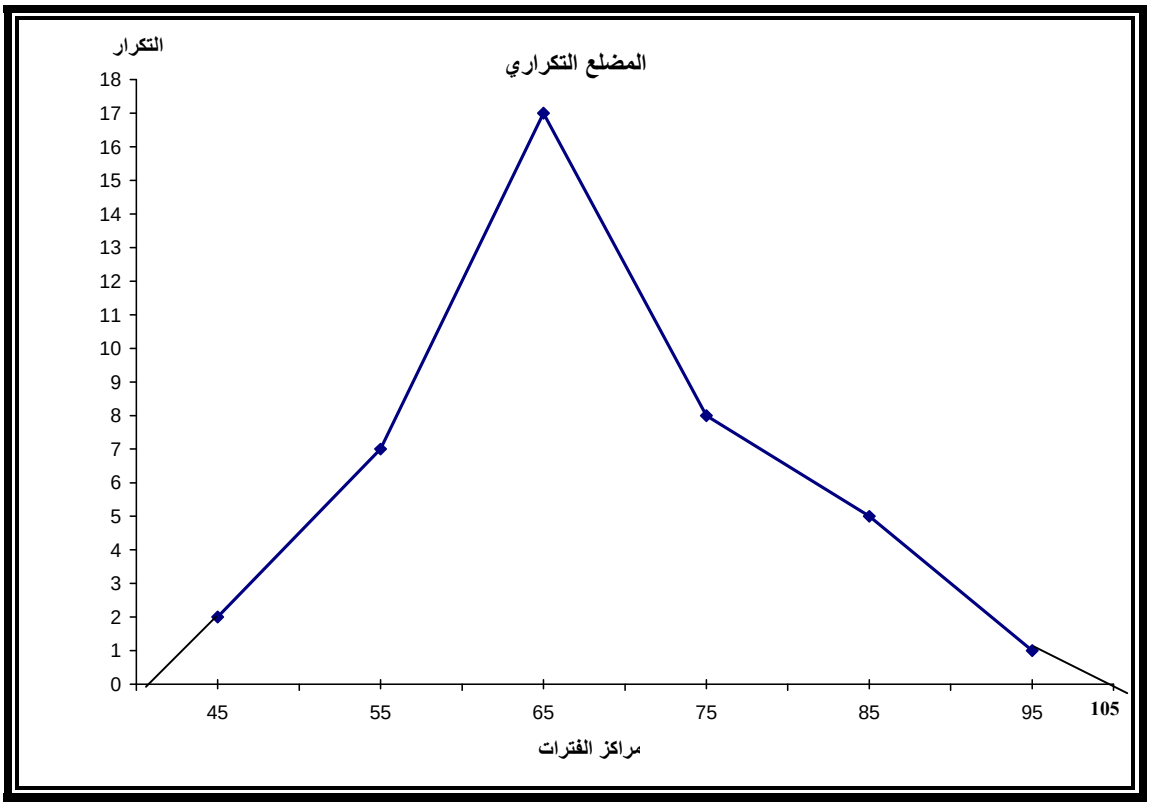
$$\text{عدد الفترات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{49}{10} = 4.9 \approx 5$$

ولرسم المضلع نوجد مراكز الفترات =

$$\text{مركز الفترة} = \frac{\text{بداية الفترة} + \text{نهاية الفترة}}{2}$$

أو مركز الفترة = بداية الفترة + $\frac{1}{2}$ طول الفترة.

الفترات	علامات الحصر	التكرارات	مراكز الفترات
40 –	||	2	45
50 –	𝍸 ||	7	55
60 –	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17	65
70 –	𝍸 |||	8	75
80 –	𝍸	5	85
100 – 90	|	1	95
المجـــموع		40	



****

س5: أوجد العزم الثالث والرابع حول المتوسط الحسابي للقيم التالية.

القـــــيم	4	8	12	16
التكرارات	2	5	9	4

الجواب:-

لإيجاد العزوم حول المتوسط الحسابي يجب أن نحسب المتوسط الحسابي أولاً كما يلي.

$$\bar{س} = \frac{\text{محـــ س} \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}}$$

$$= \frac{4 \times 16 + 9 \times 12 + 5 \times 8 + 2 \times 4}{4 + 9 + 5 + 2}$$

$$= \frac{64 + 108 + 40 + 8}{20} = \frac{220}{20}$$

$$= 11$$

$$\text{العزم الثالث حول المتوسط الحسابي} = \frac{\text{محـــ} (\text{س} - \bar{س})^3 \times \text{ك}}{\text{محـــ ك}}$$

$$\text{العزم الثالث} = \frac{4\,^3(11 - 16) + 9\,^3(11 - 12) + 5\,^3(11 - 8) + 2\,^3(11 - 4)}{20}$$

$$\text{العزم الثالث} = \frac{4\,^3(-5) + 9\,^3(-1) + 5\,^3(3) + 2\,^3(7)}{20}$$

$$\text{العزم الثالث} = \frac{4(-125) + 9 + 5(27) + 2(343)}{20}$$

$$\text{العزم الثالث} = \frac{-500 + 9 + 135 + 686}{20} = \frac{-509 + 821}{20}$$

العزم الثالث حول المتوسط = $\frac{312-}{20}$ = $\frac{156-}{10}$ = 15.6−

العزم الرابع حول المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجـــ} (\text{س} - \overline{\text{س}})^4 \times \text{ك}}{\text{مجـــ ك}}$

العزم الرابع = $\frac{4\ {}^4(11 - 16) + 9\ {}^4(11 - 12) + 5\ {}^4(11 - 8) + 2\ {}^4(11 - 4)}{20}$

العزم الرابع = $\frac{4\ {}^4(5) + 9\ {}^4(1) + 5\ {}^4(3-) + 2\ {}^4(7-)}{20}$

العزم الرابع = $\frac{4 \times 625 + 9 \times 1 + 5 \times 81 + 2 \times 2401}{20}$

العزم الرابع = $\frac{2500 + 9 + 405 + 4802}{20}$

العزم الثالث حول المتوسط = $\frac{7716}{20}$ = 385.8

****

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى
الجامعة المفتوحة - قسم الاقتصاد
امتحان مادة مبادئ الإحصاء (د. سرحان)

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتي:-

س1: البيانات التالية تبين دخول مجموعة من المنتجين في مصنع النضائد.

176	189	165	168	187	166	175	173	182	168
171	162	156	163	158	171	180	178	154	179
173	190	176	165	182	159	166	183	185	191
162	182	181	196	163	160	155	179	175	173
165	179	172	175	153	175	178	174	171	185

المطلوب: أ - تبويب هذه البيانات في جدول توزيع تكراري.

ب- رسم المضلع التكراري لهذه البيانات.

س2: أ- عرف الرقم القياسي النسبي لسعر السلعة، مع ذكر القانون المرتبط به.

ب- اذكر أهم المصادر التي تستقي منها المعلومات المختلفة للقيام بدراسة ظاهرة معينة.

س3: أوجد الوسيط للبيانات التالية بطريقتين

أ- الطريقة الجبرية (باستخدام القانون).

ب- طريقة الرسم البياني.

الفترات	40 -	45 -	50 -	55 -	60 -	65 -	المجموع
التكرار	3	2	4	6	3	2	20

س4: أوجد الانحراف المتوسط للقيم التالية ((22، 18، 24، 25، 16، 21، 18، 17، 26، 23))

س5: البيانات التالية توضح الأسعار والكميات لمجموعة من السلع في السنتين 1998 كسنة أساس، وسنة 2004 كسنة مقارنة، والمطلوب إيجاد مقياس فيشر.

نوع السلعة	الأسعار بالدينار		الكميات بالكيلوجرام	
	1998	2004	1998	2004
زيت	0.75	1.5	35	40
دقيق	0.5	1.0	30	35
أرز	1.0	2.0	25	35

انتهت الأسئلة

((الإجابة))

س1: البيانات التالية تبين دخول مجموعة من المنتجين في مصنع النضائد.

176	189	165	168	187	166	175	173	182	168
171	162	156	163	158	171	180	178	154	179
173	190	176	165	182	159	166	183	185	191
162	182	181	196	163	160	155	179	175	173
165	179	172	175	153	175	178	174	171	185

المطلوب: أ – تبويب هذه البيانات في جدول توزيع تكراري.

ب– رسم المضلع التكراري لهذه البيانات.

الجواب:–

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

المدى = 196 – 153 = 43

باعتبار طول الفترة = 10

$$\text{عدد الفترات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{43}{10} = 4.3 \cong 5$$

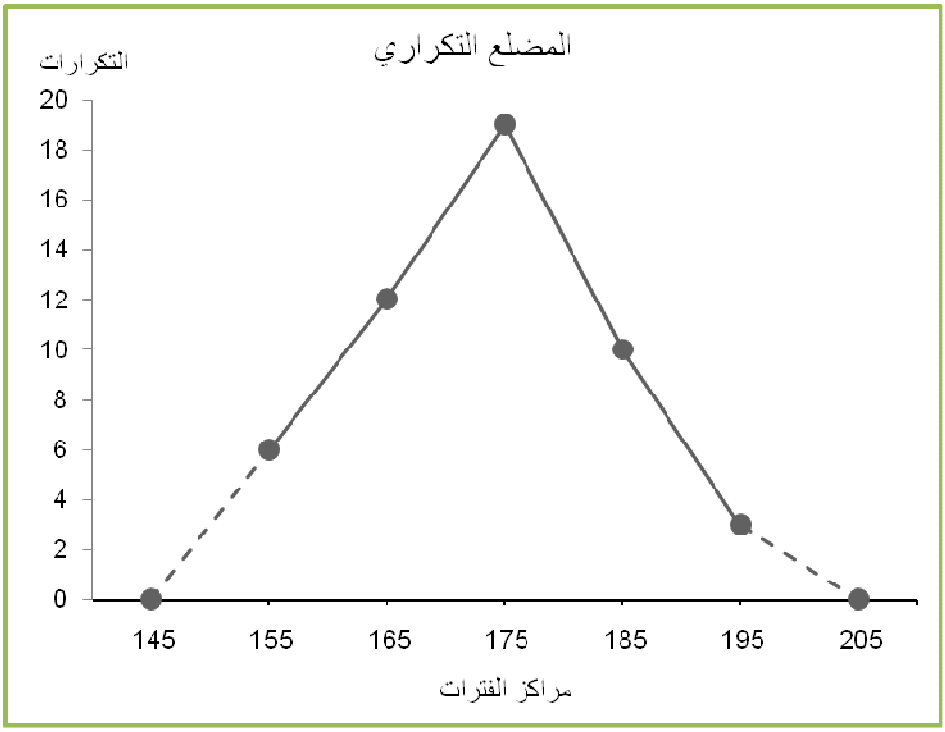
$$\text{مركز الفترة} = \frac{\text{بداية الفترة + نهايتها}}{2}$$

أو مركز الفترة = بداية الفترة + $\frac{1}{2}$ طول الفترة.

مركز الفترة الأولى = 150 + 5 = 155

والجدول التكراري المطلوب هو:–

الفترات	علامات الحصر	التكرارات	مراكز الفترات
150 –	𝍸 I	6	155
160 –	𝍸 𝍸 II	12	165
170 –	𝍸 𝍸 𝍸 IIII	19	175
180 –	𝍸 II	10	185
200 – 190	III	3	195
المجـــموع		50	



****

س2: أ- عرف الرقم القياسي النسبي لسعر السلعة، مع ذكر القانون المرتبط به.

الإجابة:

الرقم القياسي النسبي لسعر السلعة هو الرقم النسبي الذي يوضح سعر سلعة ما في سنة المقارنة بالنسبة إلى سعر نفس السلعة بالنسبة لسنة أخرى تسمى سنة الأساس، ويكتب ذلك بالقانون:-

$$\text{الرقم القياسي النسبي} = \frac{\text{محـ } P_1}{\text{محـ } P_0} \times 100$$

ب- اذكر أهم المصادر التي تستقي منها المعلومات المختلفة للقيام بدراسة ظاهرة معينة.

الإجابة ص 9-10 من الكتاب المقرر.

****

س3: أوجد الوسيط للبيانات التالية بطريقتين

أ- الطريقة الجبرية (باستخدام القانون).

ب- طريقة الرسم البياني.

الفترات	40 -	45 -	50 -	55 -	60 -	65 -	المجموع
التكرار	3	2	4	6	3	2	20

الجواب:-

لإيجاد الوسيط يجب تكوين جدول تكرار متجمع صاعد أولاً، كما يلي:-

الفترات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد
- 40	3	3
- 45	2	5
- 50	4	9
- 55	6	15
- 60	3	18
70 - 65	2	20
المجموع	20	

$$\text{رتبة } ر_2 = \text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\text{الوسيط} = \text{بداية الفترة الوسطية} + \frac{\frac{\text{مجـ ك}}{2} - \text{التكرار السابق المتجمع الصاعد}}{\text{التكرار المقابل}} \times \text{طول الفترة}$$

$$\text{الوسيط} = 55 + \frac{9 - \frac{20}{2}}{6} \times 5$$

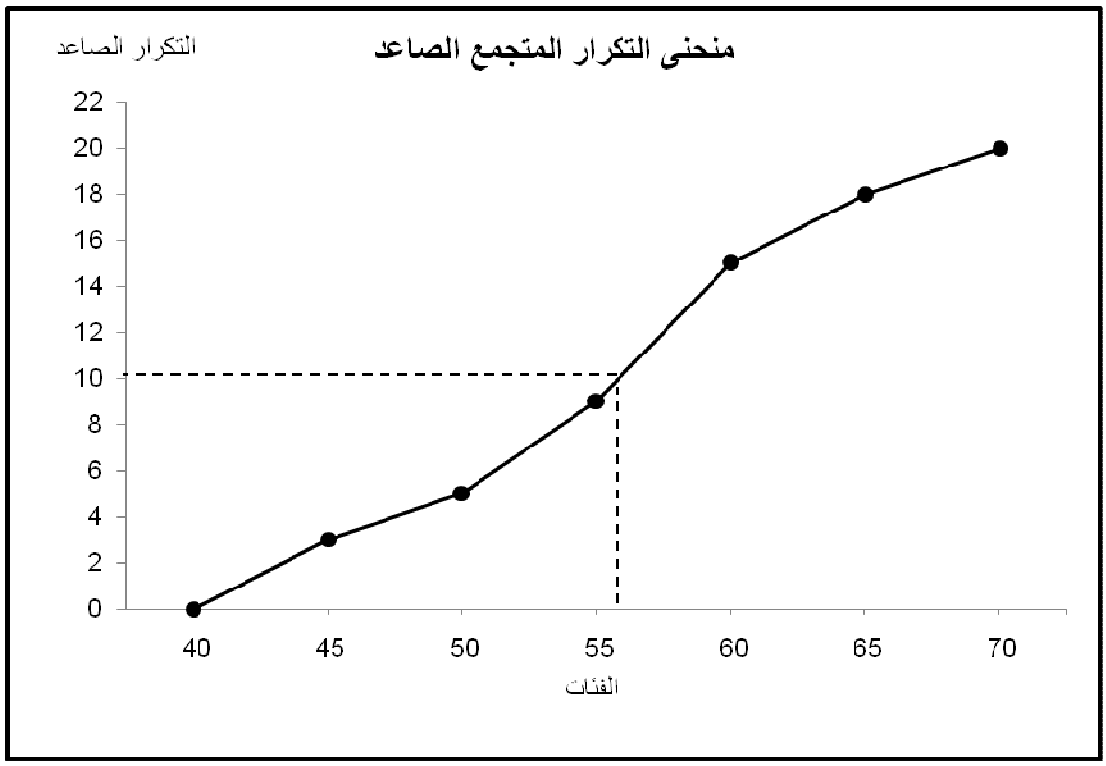
$$= 55 + \frac{9 - 10}{6} \times 5$$

$$= 55 + \frac{5 \times 1}{6} = 55 + 0.83$$

$$= 55.83$$

ب- لإيجاد الوسيط بالرسم البياني:-

نرسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد.



الوسيط = 56 تقريباً

****

س4: أوجد الانحراف المتوسط للقيم التالية....

((22، 18، 24، 25، 16، 21، 18، 17، 26، 23))

الجواب:-

$$\text{نوجد أولاً المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـــ س}}{\text{ن}}$$

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{22+18+24+25+16+21+18+17+26+23}{10}$$

$$= \frac{210}{10} = 21$$

$$\text{متوسط الانحراف المطلق} = \frac{\text{محـــ } |س - \overline{س}|}{\text{ن}}$$

$$= \frac{|21-22| + |21-18| + |21-24| + |21-25| + |21-16| + |21-21| + |21-18| + |21-17| + |21-26| + |21-23|}{10}$$

$$= \frac{|2| + |5| + |4-| + |3-| + |0| + |5-| + |4| + |3| + |3-| + |1|}{10}$$

$$= \frac{2+5+4+3+0+5+4+3+3+1}{10}$$

$$= \frac{30}{10} = 3$$

****

س5: البيانات التالية توضح الأسعار والكميات لمجموعة من السلع في السنتين 1998 كسنة أساس، وسنة 2004 كسنة مقارنة، والمطلوب إيجاد مقياس فيشر.

نوع السلعة	الأسعار بالدينار		الكميات بالكيلوجرام	
	1998	2004	1998	2004
زيت	0.75	1.5	35	40
دقيق	0.5	1.0	30	35
أرز	1.0	2.0	25	35

الإجابة:-

$$\text{مقياس رقم فيشر} = 100 \times \sqrt{\frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1} \times \frac{\sum P_1 q_0}{\sum P_0 q_0}}$$

$$= 100 \times \sqrt{\frac{35\times2 + 35\times1 + 40\times1.5}{35\times1 + 35\times0.5 + 40\times0.75} \times \frac{25\times 2 + 30\times1 + 35\times1.5}{25\times1 + 30\times0.5 + 35\times0.75}}$$

$$= 100 \times \sqrt{\frac{70 + 35 + 60}{35 + 17.5 + 30} \times \frac{50 + 30 + 52.5}{25 + 15 + 26.25}}$$

$$= 100 \times \frac{165}{82.5} \times \frac{132.5}{66.25}$$

$$= 100 \times \sqrt{\frac{21862.5}{5465.625}}$$

$$= 100 \times \sqrt{4}$$

$$= 100 \times 2 = 200\ \%$$

****